Übungsblatt 7 zur Vorlesung "Angewandte Stochastik"

Langzeitverhalten, stationäre Masse

Herausgabe des Übungsblattes: Woche 16, Abgabe der Lösungen: Woche 17 (bis Freitag, 16.15 Uhr), Rückgabe und Besprechung: Woche 18

Must

Aufgabe 39 [Erwartete Rückkehrzeit]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette auf der Menge $S := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit Übergangsmatrix P:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Welche Zustände sind rekurrent und welche vergänglich?
b) Rechnen Sie die erwarteten Rekurrenzzeiten m_i für $i \in S$ aus.

Standard

Aufgabe 40 [Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^+$] [5 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^+$ mit folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$ wenn $i \geq 1$ und $p_{01} = 1$. Ist diese Irrfahrt rekurrent? *Begründen Sie Ihre Antwort auf Grund der Lösung der Gleichungen im Hauptsatz über das stationäre Mass.*

Aufgabe 41 [Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$] [6 Punkte]

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,i+1} = 1 - p_{i,i-1} = p\ \forall i$. Untersuchen Sie diese Irrfahrt in Abhängigkeit von p auf Rekurrenz/Transienz *mit Hilfe des Hauptsatzes über das stationäre Mass.*