5. ÜBUNG ZUR VORLESUNG "ULTRAFILTER, HALBGRUPPEN, KOMBINATORIK"

Sabine Koppelberg
Ausgabe: 3. 1. 2011 (auf der Internet-Seite der Vorlesung)
Die Lösungen werden in der Übung am 6. 1. 2011 besprochen.

Aufgabe 18. Aufgabe 1.4 des Skripts.

Aufgabe 19. (a) Sei wie in 7.13 $L = X \cup C$ und $\sigma : L^* \to C^*$ eine Retraktion. Dann ist σ der Substitutionshomomorphismus s_f für eine passende Substitutionszuordnung $f : X \to C^*$.
(b) Analog sei σ ein Homomorphismus der freien Halbgruppe X^* in sich. Zeigen Sie, dass σ ein Substitutionshomomorphismus s_f für eine passende Abbildung $f : X \to X^*$ ist – streng genommen müssen Sie s_f noch definieren.

Aufgabe 20. In Kapitel 8 wird gezeigt, dass (in jeder Halbgruppe S) dicke Teilmengen IP sind. Zeigen Sie dies für die Halbgruppe $(\omega, +)$ auf elementare Weise. D.h. A sei dick in $(\omega, +)$; konstruieren Sie (unter Benutzung von 8.5(a)) eine Folge $(x_i)_{i\in\omega}$ mit $FS(x_i)_{i\in\omega} \subseteq A$.

Aufgabe 21. Aufgabe 7.4 des Skripts (soweit nach dem Stand der Vorlesung sinnvoll).

Aufgabe 18 und 19 sollen mit dem Begriff der freien Halbgruppe L^* über einem Alphabet L vertraut machen.
Aufgabe 19 ist im Hinblick auf die Fassung 7.13 des Satzes von Hales und Jewett von Interesse und bezieht sich auf 7.12. Bei der Lösung sollte man Definition 1.13 und Lemma 1.14(c) im Auge haben.
In den Aufgaben 20 und 21 werden die in Kapitel 8 als gross bezeichneten Mengen in zwei Spezialfällen ($(\omega, +)$ und endliche Gruppen) studiert.