Fachschaft Mathematik
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin

WarmUp

Stand: WiSe 2020/21

Übungsaufgaben – Lösungen
Funktionen und Abbildungen II

Aufgabe 1 Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null und $\mathbb{N}_0$ die natürliche Zahlen mit der Null. Welche der folgenden Abbildungen ist injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründe.

(i) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (m,\ n) \mapsto m + n$

(ii) $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1$

Finde eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$. $2\mathbb{N}$ bezeichne die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Beweise die Bijektivität.

Lösung:

(i) f ist nicht injektiv, da $f^{-1}(3) = \{(2,1),(1,2)\}$ und nach der Vorlesung *Funktionen und Abbildungen I* jedes Urbild einer injektiven Abbildung eines Elements höchstens einelementig sein kann; f ist nicht surjektiv, da $f^{-1}(1) = \emptyset$.

(ii) g ist injektiv und surjektiv.

Bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$*:*

Wir behaupten die Abbildung $h : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ mit $n \mapsto 2n$ ist bijektiv.
Beweis. Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $h(n_1) = h(n_2)$. Dann folgern wir

$$\begin{aligned} & h(n_1) = h(n_2) \\ \xRightarrow{\text{Def. } h} \quad & 2n_1 = 2n_2 \\ \xRightarrow{\text{Div. mit 2}} \quad & n_1 = n_2. \end{aligned}$$

Damit ist die Injektivität gezeigt. Nun zur Surjektivität. Sei $m \in 2\mathbb{N}$ und setze $n := \frac{m}{2} \in \mathbb{N}$. Dann gilt $h(n) = 2n = 2 \cdot \frac{m}{2} = m$.

Aufgabe 2 Gegeben sind die Abbildungen:

$$\begin{aligned}
\Theta: &\quad \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} &&\text{mit}\quad \varphi \mapsto \varphi(2)\\
f: &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} &&\text{mit}\quad x \mapsto 2x\\
g: &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} &&\text{mit}\quad x \mapsto 7^x - \frac{1}{2}\\
h: &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} &&\text{mit}\quad x \mapsto 2^x
\end{aligned}$$

Berechne $\Theta(f)$, $\Theta(g)$, $\Theta(f \cdot g)$, $\Theta(f \circ h)$ und $\Theta(f \circ g \circ h)$.

Lösung:

$$\Theta(f) = f(2) = 4 \qquad \Theta(g) = 48.5 \qquad \Theta(f \cdot g) = (f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2) = 194$$
$$\Theta(f \circ h) = f(h(2)) = 8 \qquad \Theta(f \circ g \circ h) = f(g(h(2))) = 4801$$

Aufgabe 3 Beweise:

(i) Jede streng monotone Funktion $f\colon \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

(ii) Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $h = g \circ f$. Zeige, dass wenn g und f injektiv sind, h auch injektiv ist.

Lösung:

(i) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass f streng monoton wachsend ist. Wir wollen einen Widerspruchsbeweis führen. Angenommen, f ist nicht injektiv, dann $\exists\, x_1 \neq x_2 \in D$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Wir betrachten zwei Fälle:

$\underline{x_1 < x_2}$: Da f streng monoton wachsend, folgt $f(x_1) < f(x_2)$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

$\underline{x_1 > x_2}$: Da f streng monoton wachsend, folgt $f(x_1) > f(x_2)$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

Da wir alle möglichen Fälle überprüft haben, muss unsere Annahme falsch gewesen sein. Es folgt f ist injektiv.

(ii) Wir wollen für $h : X \to Z$ zeigen, dass für $x_1, x_2 \in X$ mit $h(x_1) = h(x_2)$, $x_1 = x_2$ folgt. Seien dazu also $x_1, x_2 \in X$ mit $h(x_1) = h(x_2)$. Nun folgt

$$\begin{aligned} & h(x_1) = h(x_2) \\ \xRightarrow{\text{Def. } h} \quad & (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ \xRightarrow{\text{Def. „}\circ\text{“}} \quad & g(f(x_1)) = g(f(x_1)) \\ \xRightarrow{g \text{ injektiv}} \quad & f(x_1) = f(x_2) \\ \xRightarrow{f \text{ injektiv}} \quad & x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Seien X und Y zwei nicht-leere Mengen und seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ so, dass $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Zeige, dass f injektiv und g surjektiv ist. Finde weiter ein Gegenbeispiel zu den Behauptungen, dass f surjektiv und g injektiv sein muss.

Lösung: Injektivität von f: Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, dann folgt $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Da aber $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x$ gilt, folgt die Behauptung.

Surjektivität von g: folgt direkt aus $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Wenn nämlich ein $x \in X$ existierte, sodass es kein $y \in Y$ gäbe mit $g(y) = x$, dann wäre für dieses x auch nicht $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$.

Gegenbeispiel:

- Seien $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ und $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Dann ist mit $g(y_1) = x_1$ und $g(y_2) = x_2 = g(y_3)$ erfüllt, dass $(g \circ f)(x) = \mathrm{id}_X$, obwohl f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.
- Seien $X = \mathbb{R}_0^+$, $Y = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ sowie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^2$. Dann ist zwar $g \circ f = \mathrm{id}_X$ erfüllt, aber f ist nicht surjektiv und g nicht injektiv.