http://www.math.rwth-aachen.de/∼Ulrich.Schoenwaelder/Fachdidaktik/index.html

Bildung durch Mathematik? Die fünf Ebenen des Diskurses zwischen Erfahrung und Theorie

ULRICH SCHOENWAELDER
Aachen, 2. Juli 2003

Warum wird „die Mathematik" in der Schule oft nicht verstanden? Werden beim Übergang von realen Erfahrungen zur Theorie die Schritte im Prozess der Modellbildung nicht bewusst genug gemacht und deren Sinn nicht explizit reflektiert? Kann oder muss man wissenschaftliches Vorgehen in der Schule verdeutlichen? Ich werde zunächst am Beispiel der Geometrie die sprachlichen Ebenen beschreiben, die man auf dem Weg zur Theoriebildung und bei Anwendungen der Theorie unterscheiden kann, und danach den Sinn der Modellbildung als geistige Verarbeitung der Erfahrung mit philosophischer und pragmatischer Zielsetzung kennzeichnen. Die Sinnfrage für den Mathematikunterricht führt zurück auf die Ebenen des Diskurses in den verschiedenen Schulstufen.

§1. Beschreibung der fünf Ebenen des Diskurses. Der Mensch macht sich so seine Theorien von den Dingen. Oft ist es eine mathematische Theorie. Das fängt an beim Begriff der Zahl, verschiedenen Zahlbereichen, geht über die Idealisierung im Begriff der reellen Zahlen bis zum algebraischen Körperbegriff; oder es geht im Bereich der Geometrie von Stellen und gespannten Seilen im Raum über die Idealisierung zu Punkten und Geraden zu (synthetischen oder analytischen) geometrischen Theorien. Man kann beim Prozess der mathematischen Theoriebildung, ja allgemeiner bei naturwissenschaftlicher Theoriebildung die folgenden *inhaltlichen* und *formalen* [2, S. 33] Ebenen des Diskurses unterscheiden.

Semantischer Aspekt:

1. Erste Diskursebene: Ebene einer realen Ausgangssituation in der Sprache des Alltags oder des Sachgebietes
2. Zweite Diskursebene: Propädeutische Ebene mit abstrakten Begriffen, aber rein inhaltlicher Argumentation
3. Dritte Diskursebene: Konkrete Ebene mit abstrakten Begriffen und expliziten Regeln für deren Gebrauch
4. Vierte Diskursebene: Axiomatische Ebene mit (mehreren) Beispielen auf der dritten Ebene

Syntaktischer Aspekt:

S. Symbolische Ebene: Ebene der inhaltslosen symbolischen Manipulation (Termumformungen, Kalküle)

Die vier inhaltlichen Diskursebenen entsprechen dem naturwissenschaftlichen Vorgehen bei Modellbildung und Theorieentwicklung (vgl. [9, S. 77-78][1], [6, S. 192-193]). *Daneben* und von den inhaltlichen Ebenen zwei bis vier erreichbar spielt in der Mathematik die formale Ebene eine wesentliche Rolle: „Die *Trennung* und *Verselbständigung* des Formalen ist eine charakteristische Methode der Mathematik und eine ihrer Stärken." [2, S. 47] Auf dieser symbolischen Ebene wird von der inhaltlichen Bedeutung der Symbole abstrahiert, sie werden nur noch syntaktisch nach Regeln manipuliert [8]. Diese Situation liegt beim numerischen Rechnen und beim algebraischen symbolischen Rechnen vor, wie es schon immer beim Einmaleins und bei Termumformungen und heutzutage auf Taschenrechnern mit numerischen und symbolischen Funktionen (Computeralgebrasystemem) üblich ist. Bei jedem Computereinsatz wird ein solcher Kalkül benutzt.

§2. Die fünf Diskursebenen am Beispiel der Theorieentwicklung in der Geometrie. Theoriebildung (und insbesondere Modellbildung) kann von Objekten und Erfahrungen ausgehen, die in der Alltagssprache beschrieben werden, etwa Stellen im uns umgebenden Raum; gespannte Seile, gerade Kanten und Lichtstrahlen weisen Gemeinsamkeiten auf. Dies ist die erste Ebene des Diskurses. Beobachtungen führen zur Idealisierung dieser Begriffe zu „Punkt", „Gerade", „parallelen" Geraden, Punkten „auf" einer Geraden. Gewisse Beziehungen zwischen den idealisierten Objekten dieser zweiten Diskursebene sollen den realen Beziehungen entsprechen. Dies wird intuitiv erfasst. Erst auf der dritten Ebene des Diskurses werden solche Beziehungen ausformuliert, also (zunächst nur teilweise) explizit gemacht. Man sammelt Aussagen über den „Anschauungsraum". Und man fängt an, mit ihnen lokal zu argumentieren (lokales Ordnen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I): welche logischen Abhängigkeiten bestehen zwischen den Begriffen und Sachverhalten? Dabei bleibt aber immer die inhaltliche Bindung der Begriffe an die erste Diskursebene gewahrt: es geht weiterhin um Stellen im Raum oder auf dem Blatt Papier. Wir befinden uns hier auf der Diskursebene der Elemente des Euklid [4], auch wenn er die Geometrie systematischer aufbaut, als es in der Sekundarstufe I der Schule noch möglich ist. (Vgl. auch [1, S. 108, 111].)

Nach dieser synthetischen teil-axiomatischen Behandlung der Geometrie wird in der Sekundarstufe II im Rahmen der Analytischen Geometrie eine neue Beschreibung des Anschauungsraumes auf der dritten Diskursebene vorgenommen, indem die Punkte durch Positionspfeile bzgl. eines festen Ursprungspunktes ersetzt werden: man ändert die Grundbegriffe von Punkt zu Positionspfeil, von Gerade zur vektoriellen Beschreibung von Geraden durch Positionspfeile (noch ohne Koordinaten). Die Addition von Positionspfeilen geschieht über die Parallelogrammkonstruktion[2]; die Multiplikation und Division von Positionspfeilen mit rationalen Zahlen geschieht über die Strahlensatz-Konstruktion[3]. Dass verschiedene ganze Zahlen zu verschiedenen Vielfachen eines Positionspfeils führen, ist eine Eigenschaft des Anschauungsraumes, die erst hier bewusst wird, aber in der Schule nicht expliziert wird. Beim Übergang zu reellen Vielfachen braucht man Eigenschaften der reellen Zahlen explizit. Mit den bisher explizit gemachten Eigenschaften der Begriffe des Anschauungsraumes kann man für die Positionspfeile die Rechenregeln eines $\mathbb{Q}$– bzw. $\mathbb{R}$–Vektorraums nachweisen. Man hat hier zwar die Regeln eines Vektorraums, aber noch nicht den axiomatischen Begriff des Vektorraums der vierten Diskursebene. Vielmehr bleibt man auf der dritten Diskursebene.

Da diese Regeln für Positionspfeile formal mit denen für Zahlbereiche übereinstimmen, kann

[1] Hier wird auf H. Freudenthal [3, S. 116 ff], H. Winter [12, S. 75] und L. Hefendehl-Hebeker [5] hingewiesen, wo zum Teil fünf Lernstufen unterschieden werden.

[2] Im Falle von mit dem Ursprung kollinearen Punkten braucht man eine Hilfsgerade mit Hilfspunkt und zum Beweis der Unabhängigkeit der Summe hiervon den kleinen affinen „Satz" von Desargues.

[3] Hier braucht man den großen „Satz" von Desargues.

man ohne Schwierigkeiten händige Termumformungen durchführen oder ein Computeralgebrasystem benutzen, um mit Positionspfeilen zu rechnen. Solche Rechnungen finden auf der symbolischen Ebene statt. Das Standardbeispiel ist der Nachweis, dass sich die Seitenhalbierenden eines räumlichen Dreiecks $[A, B, C]$ mit den Positionspfeilen a, b, c in dem Punkt S mit dem Positionspfeil $s := \frac{1}{3}(a + b + c)$ schneiden, dem arithmetischen Mittel der gegebenen Positionspfeile. Dieser Pfeil lässt sich ja in der Form $a + \lambda(\frac{1}{2}(b + c) - a)$ für ein $\lambda \in \mathbb{Q}$ und analog für b und c darstellen. Bei der Termumformung

$$a + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(b + c) - a) = \frac{1}{3}(a + b + c)$$

können wir getrost vergessen, dass a, b, c Positionspfeile bezeichnen; jeder Schüler und jedes Computeralgebra-System führt die Rechnung aus, ohne an Pfeile zu denken. Im Gegensatz zur vierten axiomatischen Ebene, die in der Oberstufe des Gymnasiums zwar angestrebt, aber vorher kaum erreichbar ist, tritt die symbolische Ebene im Unterricht regelmäßig in Erscheinung. Sie sollte hier aber nicht nur zur Lösung eines aktuellen Problems benutzt werden; sie bietet vielmehr durch verschiedene *Interpretationen* der selben Formel die Möglichkeit, die Kraft mathematischer Abstraktionen zu demonstrieren.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist die binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2.$$

Auf der Mittelstufe wird sie durch Zahlen a und b und deren Rechenoperationen interpretiert sowie durch Flächeninhalte bei der Zerlegung eines Quadrates mit Seiten*länge* $a + b$ [2, S. 39]. Im Rahmen der Analytischen Geometrie der Sekundarstufe II können a und b auch Positionspfeile bedeuten, und das Produkt wird als *ein* (positiv definites oder indefinites) Skalarprodukt interpretiert. Die Skalarprodukte können in der Anschauungsebene als orientierte Flächeninhalte gedeutet werden. Je nach Produkt (Wahl einer Basis, die als Orthonormalbasis interpretiert wird) liefert dies physikalisch unterschiedliche Versionen des Satzes von Pythagoras (im Fall $a \cdot b = 0$) und seiner Verallgemeinerung auf beliebige Dreiecke; in separaten Aufsätzen werde ich dieses und andere Beispiele genauer auseinandersetzen.

Wie steht es nun in der Analytischen Geometrie mit der vierten axiomatischen Diskursebene? Sicher wird man die Positionspfeile auch als Linearkombinationen einer Basis aus Positionspfeilen darstellen und so eine Bijektion zwischen Positionspfeilen und ihren Komponentenspalten [Spaltenmatrizen über $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$] herstellen und erkennen, dass man mit den Spalten genau so rechnet wie mit den zugehörigen Positionspfeilen. Obwohl die [rein symbolischen] Spalten immer noch die Punkte des Anschauungsraum *beschreiben*, werden einige Schüler erkennen, dass hinter beiden Beschreibungen der Punkte ein einheitlicher abstrakter Begriff [der des Vektorraums] steht. Diesen Schritt der *Abstraktion* zur vierten Diskursebene wird man in der Sekundarstufe II behutsam anstreben, jedoch vorher selten gehen.

In Umkehrung der bisherigen Diskussion werden im fertigen Aufbau an der Universität affine Räume (im Sinne der Analytischen Geometrie) mit Hilfe eines Rechtsvektorraums über einem beliebigen Schiefkörper axiomatisch eingeführt. Das Ziel ist es jetzt nicht mehr nur, theoretische Ergebnisse über den Anschauungsraum abzuleiten, sondern einen Überblick über die Gesamtheit aller *denkbaren* „affinen Räume“ [beliebiger Dimension über beliebigen Schiefkörpern] zu bekommen und dies auch in nichtgeometrischen Situationen zu interpretieren. Analog hierzu studiert man im synthetischen Zugang [auf der vierten Diskursebene] axiomatisch definierte euklidische und nichteuklidische Räume, eine Vorgehensweise, die erst im 19. Jahrhundert die Beantwortung uralter Fragen [der dritten Diskursebene] über das euklidische Parallelenaxiom ermöglichte [10].

§3. Die Bedeutung der Unterscheidung von Diskursebenen. Natürlich muss man bei jedem Prozess von Mathematisierung eines lebensweltlichen Bereiches auf der ersten Diskursebene beginnen und über Idealisierung oder Abstraktion zur zweiten Ebene übergehen. Vermutlich bleiben viele Schüler auf dieser Stufe des Unterrichts in Mathematik und Mathematik benutzenden Fächern stehen; das hypothetische lokale Argumentieren mit an der Realität überprüften Regeln [Annahmen] über die [idealisierten] Objekte des Diskurses der dritten Ebene fällt schon vielen Schülern schwer, besonders wenn diese Vorgehensweise von ihrer Zielsetzung [des logischen lokalen Ordnens] her nicht klar wird. Wenn die Schule zum Sichbilden als *geistiger Verarbeitung der Erfahrung* [7, S. 59] anregen soll, dann kann dies bezüglich der mathematischen Methode gerade durch ein Bewusstmachen des Übergangs zur dritten oder zur symbolischen, schließlich auch zur vierten Diskursebene geschehen. Diese Standortwechsel [6, S. 193] berühren das logische Verständnis; den Diskursebenen entsprechen auf didaktisch-psychologischem Feld die Lernstufen [11], [3, S. 116 ff], [5]. Die jeweilige Diskursebene sollte beim Theoriebilden genau so im Blick stehen wie beim Anwenden dieser Theorie.

In der Lehrerausbildung für die Sekundarstufe II ist die vierte Diskursebene unverzichtbar. Studierenden wird der schwierige Übergang von der dritten zur vierten Diskursebene im ersten Semester sehr deutlich. Aber auch der Übergang in der umgekehrten Richtung zu den Diskursebenen der Schule sollte ihnen bewusst sein; es geht um keine andere Mathematik, nur eben um andere Diskursebenen. Hochschullehrer sollten dies schon mit ersten Semestern reflektieren, die Lineare Algebra bietet sich hierfür an. Auch eine bewusste Trennung der inhaltlichen Diskursebenen 1 bis 4 (zwecks Begriffsbildung) von der symbolischen Diskursebene (zum Zweck von Rechnungen) würde manche Darstellung der Linearen Algebra und der Analytischen Geometrie und ihrer Anwendungen durchsichtiger machen.

Wozu lernen wir Mathematik? Wozu lehren wir Mathematik?

Mathematikunterricht sollte erlebbar machen, wie mathematische Wissensbildung geschieht, schreibt Lisa Hefendehl-Hebeker [5, S. 79, 92] und gibt dafür einen didaktischen Grund, einen methodischen, einen bildungspolitischen, einen wissenschaftssoziologischen und einen humanitären Grund an. Diese Fragen über das Verhältnis Mensch – Mathematik kann nun jeder Schüler und jeder Lehrer in der Diskussion über die Inhalte *für sich* beantworten [2, S. 31–32]; darin liegt das *Sichbilden* durch Mathematik [7, S. 39]. Die Auseinandersetzungen der Einzelnen mit Inhalten und Methoden der Mathematik (im Unterricht) bestimmen letztendlich das Bild von Mathematik in der Gesellschaft.

Literatur

[1] Reinhold Baer. Hegel und die Mathematik. In Baltus Wigersma, editor, *Verhandlungen des 2. Hegelkongresses (18. - 21. Oktober 1931 in Berlin)*, Veröffentlichungen des Internationalen Hegelbundes, Hegelkongress 1, S. 104–120. Tübingen: Mohr, 1932.

[2] R. Fischer und G. Malle (unter Mitarbeit von H. Bürger). *Mensch und Mathematik – Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln.* Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik 1. Zürich, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1985, 1989. ISBN 3-86025-475-8, 3-411-03117-4.

[3] Hans Freudenthal. *Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1.* Klett-Studienbücher Mathematik. Stuttgart: Klett, 1973.

[4] T. L. Heath, Hrsg. *The Thirteen Books of Euclid's Elements (in 3 Volumes).* Dover Reprint Series. Dover, 1956.

[5] Lisa Hefendehl-Hebeker. Geometrie-Unterricht als Chance für die Mathematik. *Mathematica Didactica. Zeitschrift für Didaktik der Mathematik*, 20(2):79–93, 1997. ISSN 0170-1541. Review: Mathematics Didactics Database at http://www.emis.de/.

[6] Lisa Hefendehl-Hebeker. Aspekte eines didaktisch sensiblen Mathematikverständnisses. *Mathematische Semesterberichte*, 45:189–206, 1998. ISSN 0340-4897.

[7] Hartmut von Hentig. *Bildung - ein Essay.* Darmstadt: Wiss. Buchges. (Lizenzausgabe), 1997. Nach der Ausgabe München: Hanser, 1996; ISBN 3-446-18751-0.

[8] Sybille Krämer. *Symbolische Maschinen: die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriß.* Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft, 1988. ISBN 3-534-03207-1.

[9] Katja Lengnink und Werner Peschek. Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung. In Katja Lengnink, Susanne Prediger, and Frankziska Siebel, editors, *Mathematik und Mensch: Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik*, Darmstädter Schriften zur Allgemeinen Wissenschaft, Bd. 2, pages 65–82. Mühltal: Verl. Allg. Wiss. - HRW e. K., 2001. ISBN 3-935924-01-1.

[10] Richard J. Trudeau. *Die geometrische Revolution.* Basel: Birkhäuser, 1998. ISBN 3-7643-5914-5.

[11] Martin Wagenschein. *Ursprünglichens Verstehen und exaktes Denken: pädagogische Schriften; Bd. I.* Erziehungswissenschaftliche Bücherei. Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 1965.

[12] H. Winter. *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* Didaktik der Mathematik. Braunschweig: Vieweg, 1989. ISBN 3-528-08978-4.