

Übungen zu Höhere Mathematik II für Elektrotechniker

Abgabe : Freitag, 18.5.2001, vor den Übungen

1. Berechnen Sie jeweils die Determinante von A .

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(je 3 P.)

2. Zeigen Sie, daß

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

(Hinweis: Induktion nach n)

(6 P.)

3. (i) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, so daß $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Berechnen Sie A^{200} .

- (ii) Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, \quad a_{n+3} := 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, daß $A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Stellen Sie eine explizite Formel für a_n in Abhängigkeit von a_1, a_2, a_3 auf und berechnen Sie a_{201} für die speziellen Startwerte $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 3$.

(je 4 P.)

4. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, daß es ein Polynom $P \in \mathbb{R}[x]$ gibt mit $A^{-1} = P(A)$.

(Hinweis: Satz von Cayley-Hamilton)

(4 P.)

**Die Übungsaufgaben finden Sie im Internet unter der Adresse:
www.mathematik.uni-ulm.de/ReineM/nebe/Vorl/HM2**