Aufgaben zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2015

Blatt 7 Abgabetermin : Freitag, 5.6.2015, 10:00 Uhr (vor der Vorlesung)

DEFINITION. An *invariant polynomial* on $M_n(\mathbf{C})$ is a function

$$P : M_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$$

which can be expressed as a complex polynomial in the entries of the matrix, and satisfies

$$P(XY) = P(YX) ,$$

or equivalently

$$P(TXT^{-1}) = P(X)$$

for every non-singular matrix T.

(The first identity evidently follows from the second when Y is non-singular, and the general case follows by continuity, since every singular matrix can be approximated by non-singular matrices.)

Examples. The trace function $[X_{ij}] \mapsto \sum X_{ii}$, and the determinant function are well known examples of invariant polynomials on $M_n(\mathbf{C})$.

Aus: J. Milnor, J. Stasheff: *Characteristic Classes*, (1974), Seite 291.

Aufgabe 31 (Eigenwerte reeller Endomorphismen)

Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines reellen Vektorraums der Dimension n.

(i) $U \subseteq V$ sei f-invariant und $k = \dim(U)$. Ist k ungerade, so hat f mindestens einen Eigenvektor.

(ii) $U, W \subseteq V$ seien f-invariant und komplementär, und $k = \dim(U)$. Ist k ungerade und n gerade, so hat f mindestens zwei Eigenvektoren.

Aufgabe 32 (Simultane Diagonalisierbarkeit)

Es sei $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ eine endliche Menge von diagonalisierbaren Matrizen.

Man zeige: Sie sind genau dann simultan diagonalisierbar, wenn sie alle paarweise vertauschen.

Beispiel: $\mathcal{A}$ eine endliche (oder auch nur endlich-erzeugte) Untergruppe von Spiegelungen S im $\mathbb{R}^n$ mit aufeinander senkrecht stehenden Spiegeln $\mathrm{Fix}(S) = \mathrm{Eig}_1(S)$.

Oder konkret:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33 (Fahnen und Triagonalisierbarkeit)

Eine *Fahne* $\mathfrak{F} = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ in einem n-dimensionalen Vektorraum V ist eine aufsteigende Kette

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$$

von Untervektorräumen V_k der Dimension $\dim V_k = k$. Ist $f(V_k) \subset V_k$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ für einen Endomorphismus $f : V \to V$, so heißt $\mathfrak{F}$ *f-invariant.*

Man zeige: f ist genau dann triagonalisierbar, wenn es eine f-invariante Fahne gibt.

Aufgabe 34 (Resultante)

Es seien $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ und $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ zwei Polynome über $\mathbb{K}$ mit $a_n, b_m \neq 0$. Die Determinante

$$\mathrm{Res}(f,g) = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & & & \cdots & a_n & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & a_0 & \cdots & & \cdots & a_n \\ b_0 & \cdots & \cdots & b_m & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & & & & \\ & & & b_0 & \cdots & \cdots & b_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \text{m Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \text{n Zeilen} \end{array}$$

nennt man die *Resultante* der Polynome f und g. Man zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathrm{Res}(f,g) = 0$.

(ii) Die Polynome $f, xf, \ldots, x^{m-1}f, g, xg, \ldots, x^{n-1}g$ sind linear abhängig als Vektoren im Vektorraum $\mathbb{K}[x]$.

(iii) Es gibt Polynome $0 \neq p, q \in \mathbb{K}[x]$ mit $\mathrm{grad}(p) \leq m-1, \mathrm{grad}(q) \leq n-1$, so daß $pf = qg$ gilt (d.h. f und g sind linear abhängig als Elemente des Rings $\mathbb{K}[x]$.)

(iv) Es gibt einen gemeinsamen nicht-konstanten Teiler $h \in \mathbb{K}[x]$ von f und g.

Aus (iv) folgt: Haben f und g eine gemeinsame Nullstelle, so ist $\mathrm{Res}(f,g) = 0$. Und über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt auch die Umkehrung: f und g haben genau dann eine gemeinsame Nullstelle, wenn $\mathrm{Res}(f,g) = 0$.

Man untersuche (a) zwei Geraden $f(x) = a_0 + a_1 x$ und $g(x) = b_0 + b_1 x$ auf gemeinsame Nullstellen und (b) ein quadratischen Polynom $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ auf doppelte Nullstellen.

***-Aufgabe 35** (Ähnlichkeitsinvarianten)

Eine Funktion $\Phi : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, die ein Polynom $\Phi(X) = \Phi(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn})$ in den Matrizeneinträgen x_{ij} ist, heißt *invariant* (besser: Ähnlichkeitsinvariante), falls gilt:

(1) $\Phi(TXT^{-1}) = \Phi(X)$ für $X \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}), T \in GL_n(\mathbb{K})$.

Die Eigenschaft

(2) $\Phi(XY) = \Phi(YX)$ für $X, Y \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$

ist vermeintlich stärker; aber (2) folgt sofort aus (1), wenn X oder Y invertierbar ist. Man zeige für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit einem Approximationsargument, daß allgemein (2) aus (1) folgt.

(Hinweis: Man überlege sich, daß für jede Matrix A es Matrizen B geben muß (z.B. $\pm\mathbb{1}$), so daß das Polynom $p_{A,B}(s) := \mathrm{Det}(A + sB)$ nicht konstant ist und folglich nur endlich-viele Nullstellen hat. Siehe das Bild vorne mit der Quelle der Aufgabe.)