15.05.06

6. S-Integrierbarkeit (Teil II)

Timo Geltinger

Korollar 1.7.
Sei $F : \Omega \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ein Lifting von $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei $\Theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Dann ist ${}^*\Theta(F)$ ein S-integrierbares Lifting von $\Theta(f)$ und

$$\mathbb{E}({}^*\Theta(F)) \approx \int \Theta(f)\ \mathrm{d}\mu_L$$

2 Charakterisierung von S-Integrierbarkeit

Lemma 2.1. *Sei $F : \Omega \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ intern und μ-messbar. Dann gilt:*

$$F \text{ ist S-integrierbar} \Longleftrightarrow \forall\, r \approx \infty :\ \mathbb{E}_{\{|F|>r\}}(|F|) \approx 0$$

Korollar 2.2. *Sei $F : \Omega \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ intern und μ-messbar und seien $F_n = F\ \mathbf{1}_{\{|F| \leq n\}}$, $n \in \mathbb{N}$. Dannn gilt:*

$$F \text{ist S-integrierbar} \Longleftrightarrow\ {}^\circ\mathbb{E}(|F - F_n|) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Korollar 2.3. *Sei $F : \Omega \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ intern und μ-messbar. Dann gilt:*

$$F \text{ ist S-integrierbar} \Longleftrightarrow \exists \text{ S-integrierbare } F_n : \Omega \to {}^*\mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \text{ mit } {}^\circ\mathbb{E}(|F - F_n|) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Lemma 2.4. *Sei $F : \Omega \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ intern und μ-messbar. Dann sind äquivalent:*

(i) *F ist S-integrierbar.*

(ii) *${}^\circ F$ ist Loeb-integrierbar mit $\mathbb{E}_A(F) \approx \int\limits_A {}^\circ F\ \mathrm{d}\mu_L \quad \forall A \in \mathcal{A}$.*

Korollar 2.5. *Sei $F_n : \Omega \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ S-integrierbar, $n \in \mathbb{N}$. Weiter gelte ${}^\circ\mathbb{E}(|F_n - F_m|) \longrightarrow 0$ für $n \geq m \to \infty$.*

Dann existiert ein Loeb-integrierbares $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, so dass F_K ein S-integrierbares Lifting von f ist für alle hinreichend kleinen $K \approx \infty$.