

Kapitel 2: Auswahlverfahren Genauigkeit

2.1 Numerische Konvergenzordnung

gegeben: \bullet ANP $\pi: y'(t) = f(t, y(t)), y(a) = x_0$ $\mathbb{I} = [a, b]$ mit Lösung y

\bullet Verfahren mit Lösung x zu äquidistantem Gitter $t_n = a + ih, i=0, \dots, n$

Fehler: $e_n = \max_{0 \leq i \leq n} \|X(t_i) - y(t_i)\|$ $\text{O}(\Delta t^m)$

theoretisch erwartete h -Abhängigkeit für h klein

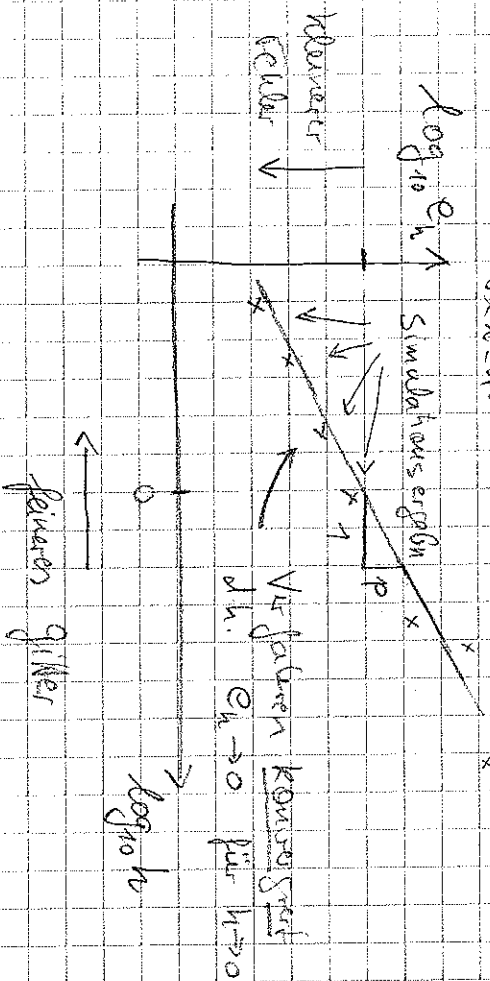
$e_n \leq C h^p$ - sog. Konvergenzordnung

beachte: $\log_{10} C h^p$

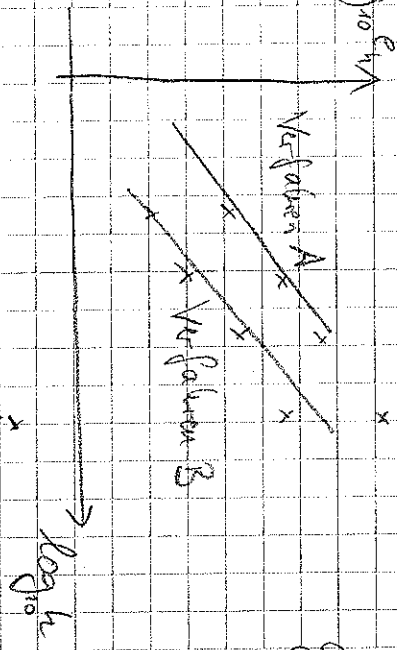
$= \log_{10} C + p \cdot \log_{10} h$

affin linear mit

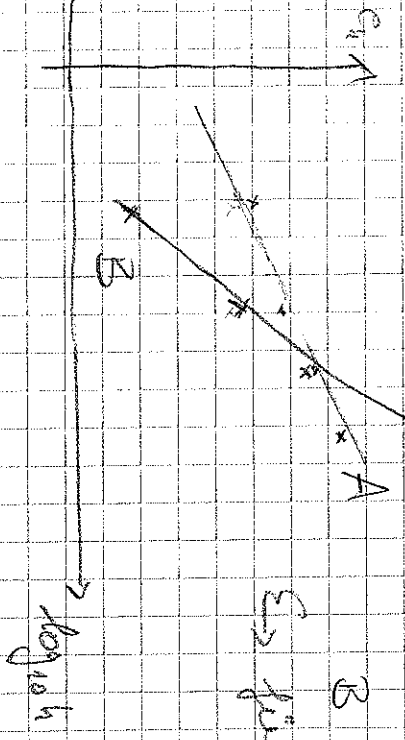
Steigung p



$\log_{10} E_{h_i}$
 Gleiche Ordnung
 aber B ist sensibler



$\log_{10} E_{h_i}$
 \Rightarrow für $h \rightarrow 0$ wird B sensibler als A
 B hat höhere Ordnung als A



praktische Bestimmung der numerischen Konvergenzordnung

- wähle $h_1 > h_2 > \dots > h_m$
- berechne e_{h_i} durch M Simulationen
- bestimme $u_i = \log_{10} h_i$ $v_i = \log_{10} e_{h_i}$
- berechne Steigung der linearen Ausgleichsgerade durch (u_i, v_i) in Matlab $p = \text{polyfit}(u, v, 1)$; % p(1) ist Steigung \leftarrow grad

2.2. Allgemeine Runge-Kutta-Verfahren von Approximationsverfahren

zu einem Approximationsverfahren (AV) x gehört

die N Dimension

$T = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ Intervall

$x_0 \in \mathbb{R}^d$ Startwert

$\Gamma \in \{i, t_0, t_n\} \mid n \in \mathbb{N}, t_0 = a, t_n = b, t_i < t_{i+1}$ Menge zulässiger Stufen

zu jedem $G = \{t_0, \dots, t_n\} \in \Gamma$ und VR W

$\delta_f: G \setminus \{a\} \rightarrow W$

$t_i \mapsto f(t_i) - P(t_{i-1})$

Zuwachs von $f: G \rightarrow W$

Specialfall $P(t) = t$: schreibe δ_i statt δ_f also $\delta_i: G \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$

$t_i \mapsto \delta_i = t_i - t_{i-1}$

Schrittweite

$\max \delta_i$: maximale Schrittweite

$J_G = \bigcup \delta_i$ diskretisierte Version von $J \subset \mathbb{R}$

$\mathcal{F}_G : \mathcal{U} : G \rightarrow \mathbb{R}^{dx}$ Güterfunktionen

$\|u\|_G := \max_{t \in G} \|u(t)\|_\infty$ Norm auf \mathcal{F}_G

$V_G : G \setminus \{a\} \times \mathcal{F}_G \rightarrow \mathbb{R}^{dx}$ Verfallsratefunktion mit $V_G(t, u)$ Wertsch von $u(t)$, ... $u(b)$

$$(t, u) \mapsto V_G(t, u)$$

Γ enthält mindestens eine Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\max_{G_n} \delta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

das durch $X(a) = X_0$

$$\frac{\delta X(t)}{\delta t} = V(t, X) \quad t \in (a, b]_G$$

die gewählte Güterfunktion heißt Lösung von X

in der folgenden Form $X(a) = X_0$

$$\frac{X(t_n) - X(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} = V(t_{n-1}, X) \quad n = 1, \dots, |G| - 1$$

2.2. Theoretische Konvergenzformung

allg. Vorgehensweise zum Lösen von Gleichungen

$$\begin{array}{ccc} \text{Sol. } F: V \rightarrow W & \text{mit } F^{-1}: W \rightarrow V & \text{Lip-Stetig} \\ \nearrow & & \nearrow \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \\ \text{norm. VR} & & \end{array}$$

Wir betrachten die Gleichung $E(x) = 0$

// existiert y die Gleichung $F(y) = 0$ genauer $E(y) \in \mathcal{B}_\delta(0)$
 // dann ist y fast die Lösung: $y \approx x$ genauer

$$\|x - y\| = \|E^{-1}(E(x)) - E^{-1}(E(y))\| \leq L \|E(x) - E(y)\| < L \delta$$

$$\text{also } y \in \mathcal{B}_{L\delta}(x)$$

angewandt auf Approximationsverfahren:

Schrittweise Verfahrensvorschrift für das Randwertproblem mit F_G & F_G^* und F_G^* wobei

$$u \mapsto w$$

$$w(a) := u(a) - x_0$$

$$w(t) := \frac{\delta u(t)}{\delta t} - V_G(t, u) \quad t \in (a, b]_G$$

Dann: Lösung x von x auf G über G erfüllt $F_G(x) = 0$

$$\text{Notation: } F_G(t, x) := F_G(x)(t)$$

Einsetzen der Lösung y von $y'(t) = F(t, y(t))$, $y(a) = x_0$
führt auf: