Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 07.05.2012

Abgabe: 14.05.2012
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Veranstaltung
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Blatt 02

Bitte kreuzen Sie die schriftlichen Teilaufgaben, die Sie in der Übungsgruppe vorrechnen könnten, direkt auf dem Übungsblatt an und geben Sie dieses mit ab.

Aufgabe 1: Numerische Verfahren und lineare Systeme

☐ **(a)** Wir betrachten für ein $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ein $b \in \mathbb{R}^n$ das lineare DGL-System $\dot{x} = Ax + b$. Bestimmen Sie für diesen Fall die Verfahrensvorschrift für ein allgemeines Taylor-Verfahren k-ter Ordnung. **(schriftlich)**

☐ **(b)** Für ein $\alpha > 0$ sei folgendes Runge-Kutta-Verfahren gegeben:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Berechnen Sie einen Schritt dieses Verfahrens angewandt auf das homogene lineare AWP $\dot{x} = Ax$, $x(t_0) = x_0$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung dieses Systems. Wie muss man α wählen, damit die numerische Approximation an die exakte Lösung besonders gut wird? **(schriftlich)**

Aufgabe 2: Adams-Bashforth-Verfahren (schriftlich) ☐

Bestimmen Sie die Verfahrensvorschrift für das Adams-Bashforth-Verfahren unter Verwendung von drei äquidistant liegenden Stützstellen.

Aufgabe 3: numerische Konvergenzordnung

☐ **(a)** Gegeben sei das AWP $y'(t) = 2t(y(t)+a)^2$, $y(0) = 1$ für ein $a > 0$. Bestimmen Sie das maximale Existenzintervall und geben Sie die Lösung des AWP auf diesem Intervall in Abhängigkeit von a an. **(schriftlich)**

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Matlab und der exakten Lösung aus **(a)** für ein festes $a > 0$ auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2\sqrt{1+a}}]$ die numerische Konvergenzordnung des expliziten und des impliziten Euler-Verfahrens, der impliziten Mittelpunktsregel und des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens (**1(b)** mit $\alpha = 1$). Die theoretischen Konvergenzordnungen der zu untersuchenden Verfahren sind der Reihe nach gegeben durch 1, 1, 2 und 4. Verwenden Sie bei den impliziten Verfahren eine geeignete Fixpunktiteration. Um Ihre Matlab-Routinen für die verschiedenen Verfahren auch in Zukunft immer einfach einbinden zu können und sie für zusätzliche Optionen offen zu halten, finden Sie auf der Homepage eine pdf-Datei mit Anweisungen, wie diese Routinen aufgebaut sein sollten. Bitte halten Sie sich daran, das wird das zukünftige Programmieren erleichtern!