Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk

Ausgabe: 13. Jan., WS 2007/08
Übung: 17. Jan. G435

Numerik stochastischer Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1: (Numerische Konvergenzordnung)

Implementieren Sie für die Differentialgleichung

$$dS_t = \mu S dt + \sigma S \cos(2\pi K S_t) dW_t, \qquad S_0 = 1, \qquad \mu = 1.0, \quad \sigma = 0.5, K \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$

das **Euler-Maruyama Verfahren**

$$D_h S_t = \mu S_t h + \sigma S_t \cos(2\pi K S_t) D_h W_t, \qquad S_0 = 1, \qquad t \in \{0, h, 2h, \ldots, 1\} \tag{2}$$

und vergleichen Sie Lösungen X_t basierend auf groben Zeitschritten $h = \Delta t$ mit einer Lösung Y_t zum feinen Zeitschritt $h = \delta t$.

a) Berechnen Sie im Fall $K = 0$ für geeignete Schrittweiten $h = h_i > 0$ die Erwartungswerte

$$\epsilon(h) = \max_{t_k = kh \in [0,1]} E(|X_{t_k} - Y_{t_k}|), \qquad \tilde{\epsilon}(h) = \max_{t_k = kh \in [0,1]} |E(X_{t_k}^2) - E(Y_{t_k}^2)|$$

möglichst präzise und zeichnen Sie die Punkte $(\log_{10} h_i, \log_{10} \epsilon(h_i))$ bzw. $(\log_{10} h_i, \log_{10} \tilde{\epsilon}(h_i))$ jeweils zusammen mit ihren Ausgleichsgeraden in ein Diagramm. Die Steigungen der Ausgleichsgeraden nennt man numerische Konvergenzordnungen. Wieso? (Benutzen Sie den Matlab Befehl **polyfit**.)

b) Experimentieren Sie nun mit $K > 0$. Was stellen Sie fest? Versuchen Sie das Verhalten des Fehlers zu erklären.

c) Zeigen Sie im Fall $K = 0$ mit der diskreten Ito-Formel, dass X_t nur wenig von der exakten Lösung

$$S_t = \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right). \tag{3}$$

abweicht und vergleichen Sie einige Pfade, um das Ergebnis zu überprüfen. Ermitteln Sie die numerische Konvergenzordnung wie in (a).