Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 13. Jan., WS 2004/05
Übung: 18. Jan. 10-12h, C421

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 22: Matrixwertige rationale Funktionen

Es seien P, Q zwei Polynome, welche keine gemeinsame Nullstellen besitzen. Dann definiert der Quotient R mit

$$R(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}$$

eine rationale Funktion. Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sei $R(A)$ definiert durch

$$R(A) := P(A)\, Q(A)^{-1} ,$$

falls $Q(A)$ invertierbar ist.

0) (Vorüberlegung) Verifiziere die Aussage, daß die Menge der oberen Dreiecksmatrizen eine *Algebra* bildet. Dies beinhaltet insbesondere, daß das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix ist. Darüberhinaus stellt die Menge der invertierbaren, oberen Dreiecksmatrizen eine *Gruppe* dar; somit ist die Inverse ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix.

a) Zeige, daß $R(A)$ genau dann existiert, wenn kein Eigenwert der Matrix A Polstelle der rationalen Funktion R bzw. Nullstelle des Polynoms Q ist.

b) Beweise, daß das *Spektrum* (Menge der Eigenwerte) von $R(A)$ gegeben ist durch

$$\sigma\big(R(A)\big) = R\big(\sigma(A)\big) .$$

c) Begründe, weshalb für den *Index* eines Eigenwertes μ von $R(A)$ gilt:

$$\iota(\mu) \leq \max\{\iota(\lambda) : \lambda \in \sigma(A), \mu = R(\lambda)\}$$

Dabei entspricht der Index gerade der Dimension des größten, zugehörigen Jordanblocks. Ferner erläutere man, daß der Hauptraum von μ folgendermaßen dargestellt werden kann

$$\mathrm{Hau}\big(R(A), \mu\big) = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A), \mu = R(\lambda)} \mathrm{Hau}(A, \lambda) .$$

Unter dem Hauptraum (verallgemeinerten Eigenraum) zum Eigenwert λ einer Matrix M versteht man den Raum $\ker(M - \lambda)^r$, wobei r die algebraische Vielfachheit von λ angibt.

d) Zeige, daß $P(A)$ und $Q(A)^{-1}$ kommutieren, d.h.

$$P(A)\, Q(A)^{-1} = Q(A)^{-1}\, P(A) ,$$

sofern $Q(A)^{-1}$ existiert.

Hinweis: Man überlege sich zunächst, daß die Invertierbarkeit von $Q(A)$ eine Eigenschaft der *Ähnlichkeitsklasse* von A ist. Es genügt dann, die Behauptung in a) für einen speziellen Repräsentanten der Ähnlichkeitsklasse nachzuweisen.