Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Stefan Volkwein
Patrick Kurth

25.01.2010

Analysis III

11. Übungsblatt

4. Übung zur Maß- und Integrationstheorie

1. *(Messbarkeit)*

Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum und $f_n : X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{A}$-messbar für $n \in \mathbb{N}$. Seien

$$A := \{x \in X : f_1(x) < f_2(x)\}, \quad B := \{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\},$$
$$C := \{x \in X : \exists\ lim_{n\to\infty} f_n(x)\}.$$

Zeigen Sie, dass $A, B, C \in \mathscr{A}$.
Hinweis: Verwenden Sie, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist.

2. *(Riemann- und Lebesgue-Integrierbarkeit 1)*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ eine nicht-negative, messbare Abbildung, die Riemann-integrierbar ist.
Zeigen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist, mit

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f d\lambda,$$

wobei links das Riemann-Integral und rechts das Lebesgue-Integral bzgl. des Lebesgue-Maßes steht.

3. *(Riemann- und Lebesgue-Integrierbarkeit 2)*

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } x \geq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} sin(x) & \text{für } x \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\text{und } h : (0, 1) \to \mathbb{R}, h(x) := ln(x).$$

Zeigen Sie, dass f und h Lebesgue- aber nicht Riemann-integrierbar sind und dass g uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.
Hinweis: Definieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ $a_n := \int_{\pi(n-1)}^{\pi n} \frac{1}{x}|sin(x)|dx$ und schätzen Sie ab.

Abgabe bis Montag 1. Februar **12.00 Uhr** in die Briefkästen auf F4.