A Zusammenfassung der Sprachregeln

A.1 Korrekte Ausdrücke

Die folgenden Regeln kontrollieren das korrekte Aufschreiben von Ausdrücken. Gleichzeitig sorgen Sie dafür, dass gewisse ::-Aussagen gelten. In Beweisen müssen die Regeln nicht angegeben werden. Der Beweisautor und der Beweisleser kontrollieren sie sozusagen im Hintergrund.

Es gilt X :: Begriff, für alle X aus der Liste Zuordnung, Begriff, Objekt.

Gilt $u : X$, für ein X aus der Liste Zuordnung, Begriff, Objekt, dann gilt auch $u :: X$.

Es gilt wahr : Objekt, falsch : Objekt.

Gilt $x :: A$ dann gilt auch $x ::$ Objekt.

Steht x für einen Platzhalternamen, dann gilt $x ::$ Objekt in der Umgebung, wo der Platzhalternamen benutzt werden darf.

Gilt F :: Zuordnung, dann gilt auch Argument(F) :: Begriff.

Gilt F :: Zuordnung und x : Argument(F) oder x :: Argument(F), dann gilt auch $F(x)$ :: Objekt.

Es gilt (x **mit** B $\square$) :: Begriff, wenn x eine kommagetrennte Liste von paarweise verschiedenen Namen und B eine strichpunktgetrennte Liste von Wahrheitswerten ist.

Gilt u : (x **mit** B $\square$), dann gilt auch u :: (x **mit** B $\square$).

Gilt u :: Objekt und (x **mit** B $\square$) :: Begriff, dann gilt (u :: (x **mit** B $\square$)) : Wahrheitswert.

Es gilt ((x **mit** B) $\mapsto Y \ldots :: C$) :: Zuordnung, wenn (x **mit** B $\square$) :: Begriff gilt und $Y :: C$ unter den Annahmen B gilt (entsprechend mit $\ldots : C$). Argument((x **mit** B) $\mapsto Y \ldots :: C$) ist dann eine Abkürzung für (x **mit** B $\square$). Gilt u :: (x **mit** B $\square$), dann gilt $F(u) :: C$ (bzw. $F(u) : C$).

Zu den grundlegenden Zuordnungen stehen jeweils abkürzende Symbole zur Verfügung. Die Bedingungen an die Argumente und die Typinformation zu den Ergebnissen dieser Zuordnungen werden in folgender Tabelle zusammengefasst.

Abkürzung	**Argumentbedingung**	**Ergebniseigenschaft**
$A = B$	A, B :: Objekt	: Wahrheitswert
$x : B$	x :: Objekt; B :: Begriff	: Wahrheitswert
$\exists B$	B :: Begriff	: Wahrheitswert
$\downarrow B$	B :: Begriff; $\exists! B$	: B
$E \wedge F$	E, F : Wahrheitswert	: Wahrheitswert
$E \vee F$	E, F : Wahrheitswert	: Wahrheitswert
$E \Rightarrow F$	E, F : Wahrheitswert	: Wahrheitswert
$\neg F$	F : Wahrheitswert	: Wahrheitswert

Zum Verständnis dieser und der nachfolgenden Tabellen sind folgende Begriffe und Zuordnungen wichtig:

Wahrheitswert := A **mit** $(A = \text{wahr}) \vee (A = \text{falsch})$ □;
Spezialisierung(A, B **mit** A, B :: Begriff) := $\forall x$ **mit** $x : A$ **gilt** $x : B$;
Eindeutigkeit(A **mit** A :: Begriff) := $\forall u, v$ **mit** $u, v : A$ **gilt** $u = v$;
atomar := A **mit** A :: Begriff; $\exists A$; Eindeutigkeit(A) □;
Abbildung(A, B **mit** A, B :: Begriff) := F **mit**
  F :: Zuordnung; Argument(F) = A; $\forall x$ **mit** $x : A$ **gilt** $F(x) : B$ □;

Als Infix-Notation wählen wir im Folgenden $A \sqsubset B$ für Spezialisierung(A, B) und sagen A *spezialisiert* B. Außerdem schreiben wir statt Eindeutigkeit(A) kurz $!A$, was wir als *es gibt höchstens ein Beispiel von* A aussprechen. Als Abkürzung von A : atomar benutzen wie die Zusammenziehung der beiden Symbole $\exists$ und ! zu $\exists! A$ und sagen *es gibt genau ein Beispiel zu* A.

A.2 Axiome

(A1)	wahr
(A2)	(falsch $\wedge$ falsch) $=$ falsch
(A3)	(falsch $\wedge$ wahr) $=$ falsch
(A4)	(wahr $\wedge$ falsch) $=$ falsch
(A5)	(wahr $\wedge$ wahr) $=$ wahr
(A6)	(falsch $\vee$ falsch) $=$ falsch
(A7)	(falsch $\vee$ wahr) $=$ wahr
(A8)	(wahr $\vee$ falsch) $=$ wahr
(A9)	(wahr $\vee$ wahr) $=$ wahr
(A10)	($\neg$ wahr) $=$ falsch
(A11)	($\neg$ falsch) $=$ wahr
(A12)	$\forall A$ **mit** A **gilt** $A =$ wahr;
(A13)	$\forall x$ **mit** x :: Objekt **gilt** $x = x$;
(A14)	$\forall A, B$ **mit** A, B :: Begriff; $A \sqsubset B; B \sqsubset A$ **gilt** $A = B$;
(A15)	$\forall F, G$ **mit** F, G :: Zuordnung; Argument(F) $=$ Argument(G); $\forall x$ **mit** x : Argument(F) **gilt** $F(x) = G(x)$ **gilt** $F = G$;
(A16)	wahr : Objekt;
(A17)	falsch : Objekt;
(A18)	$\forall u$ **mit** u : Objekt **gilt** (x **mit** $x = u$ $\square$) : Begriff;
(A19)	$\forall A, B$ **mit** A, B : Begriff **gilt** (x **mit** $(x : A) \vee (x : B)$ $\square$) : Begriff;
(A20)	$\forall A, B$ **mit** A :: Begriff; B : Begriff; $A \sqsubset B$ **gilt** A : Begriff;
(A21)	$\forall F$ **mit** F :: Objekt **gilt** (F : Zuordnung) $= \exists A, B$ **mit** A, B : Begriff; F :: Abbildung(A, B) $\square$;

A.3 Schritte

Kompression	
Ich möchte zeigen	$x :: B$
Vorher zu tun	Alle Aussagen aus der Definition von B die beim Ersetzen des Platzhalters durch das Objekt x entstehen, müssen nachgewiesen werden.
Beweistext	Wir erhalten $x :: B$ durch Kompression.

Kompression	
Ich möchte zeigen	$x : B$
Vorher zu tun	$x :: B$ muss komprimierbar sein und eine Aussage der Form $x : C$ muss gelten.
Beweistext	Wir erhalten $x : B$ durch Kompression.

Existenznachweis	
Ich möchte zeigen	$\exists B$
Vorher zu tun	Nachweis einer Aussage der Form $x : B$ mit einem geeigneten x.
Beweistext	Da $x : B$ gilt, erhalten wir $\exists B$.

direkter Beweis	
Ich möchte zeigen	$A \Rightarrow B$
Vorher zu tun	Nachweis der Aussage B unter der Annahme, dass A gilt. Diese Annahme ist bis zur Endemarke $\blacksquare$ gültig.
Beweistext	In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass A gilt ... und somit gilt B $\blacksquare$

direkter Beweis	
Ich möchte zeigen	$\forall x$ **mit** B **gilt** F
Vorher zu tun	Nachweis der Aussage F unter der Annahme, dass die Objekte aus der Liste x zur Verfügung stehen und die Aussagen aus der Liste B gelten. Die Objekte und die Annahmen sind bis zur Endemarke $\blacksquare$ verfügbar.
Beweistext	In einem direkten Beweis nehmen wir an, dass Objekte x gegeben sind, für die B gilt ... womit schließlich F gilt $\blacksquare$

Widerspruchsbeweis	
Ich möchte zeigen	$\neg A$
Vorher zu tun	Nachweis der Aussage (wahr = falsch) unter der Annahme, dass A gilt. Diese Annahme ist bis zur Endemarke $\lightning$ gültig.
Beweistext	In einem Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass A gilt ... $\lightning$ Also gilt $\neg A$.

Gegenbeispiel	
Ich möchte zeigen	$\neg\forall x$ **mit** B **gilt** F
Vorher zu tun	Finden eines Objekts x, so dass B erfüllt ist und $\neg F$ gilt.
Beweistext	x ist ein Gegenbeispiel zu $\forall x$ **mit** B **gilt** F.

Ersetzung	
Wobei hilft mir	$A = B$
zum Nachweis von	V, wenn es eine geltende Aussage U gibt, aus der durch selektives Austauschen von A und B die Aussage V entsteht. (Ausnahmen: in Ausdrücken der Form $u :: B$ darf B nur ersetzt werden, wenn $u : B$ gilt. In Ausdrücken $F(x)$ darf F nur ersetzt werden, wenn $x : \text{Argument}(F)$ gilt.)
Beweistext	Wegen $A = B$ und U gilt auch V.

Anwendung	
Wobei hilft mir	$A \Rightarrow B$
zum Nachweis von	B, wenn die Aussage A gilt.
Beweistext	Da A gilt zeigt die Anwendung von $A \Rightarrow B$, dass B gilt.

Anwendung	
Wobei hilft mir	$\forall x$ **mit** B **gilt** F
zum Nachweis von	F mit x ersetzt durch u, wenn u anstelle von x die Bedingungen B erfüllt.
Beweistext	Anwendung von $\forall x$ **mit** B **gilt** F auf u zeigt, dass ... gilt.

Expansion	
Wobei hilft mir	$x :: B$
zum Nachweis von	den Aussagen aus der Bedingung B mit den Platzhaltern ersetzt durch x.
Beweistext	Expansion von $x :: B$ zeigt ...

Expansion	
Wobei hilft mir	$x : B$
zum Nachweis von	den Aussagen aus der Bedingung B mit den Platzhaltern ersetzt durch x.
Beweistext	Expansion von $x : B$ zeigt ...

Beispielwahl	
Wobei hilft mir	$\exists B$
zum Nachweis von	einer Aussage F, die unter der Annahme eines Beispiels zu B bewiesen werden kann.
Beweistext	Sei x ein Beispiel von B ... also gilt F.

Fallunterscheidung	
Wobei hilft mir	$A \vee B$
zum Nachweis von	einer Aussage F, die sowohl unter der Annahme A bewiesen werden kann, als auch unter der Annahme B.
Beweistext	In einer Fallunterscheidung basierend auf $A \vee B$ betrachten wir Fall A ... dann gilt F. Im Fall B folgt ... also wieder F. Insgesamt gilt damit F.

Gegenbeispielwahl	
Wobei hilft mir	$\neg\forall x$ **mit** B **gilt** F
zum Nachweis von	einer Aussage G, die unter der Annahme eines Objekts bewiesen werden kann, das B und $\neg F$ erfüllt.
Beweistext	Sei u ein Gegenbeispiel zu $\forall x$ **mit** B **gilt** F ... also gilt G ■