Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

20. Oktober 2011

Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 (Heisenbergsche Vertauschungsrelation und beschränkte Operatoren) Gegeben sei ein Hilbertraum $\mathscr{H} \neq \{0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass für alle selbstadjungierte beschränkte Operatoren $A \in L(\mathscr{H})$ bereits

$$\|A^{2^m}\| = \|A\|^{2^m}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Gegeben seien zwei beschränkte selbstadjungierte Operatoren $P, Q \in L(\mathscr{H})$. Zeigen Sie, dass diese nie die *Heisenbergsche Vertauschungsrelation* erfüllen können, d.h. es gilt immer

$$[P, Q] := PQ - QP \neq -i\hbar \cdot \mathrm{id}_H.$$

(Tipp: $PQ^n - Q^nP = -i\hbar \cdot nQ^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$)

Aufgabe 1.2 Gegeben sei ein Hilbertraum $\mathscr{H} \neq \{0\}$.

(i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{H}$ und $x \in \mathscr{H}$. Zeigen Sie:

$$x_n \to x \Longleftrightarrow \{\|x_n\| \to \|x\|\} \wedge \{\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \text{ für alle } y \in \mathscr{H}\}$$

(ii) Sei $T \in L(\mathscr{H})$ mit $\langle Tx, x\rangle = 0$ für alle $x \in \mathscr{H}$. Zeigen Sie $T = 0$.

(iii) Der Operator $T \in L(\mathscr{H})$ ist genau dann normal, wenn $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in \mathscr{H}$ gilt.

(iv) Seien $T_n, T \in L(\mathscr{H})$ $(n \in \mathbb{N})$ normal mit $T_nx \to Tx$ für alle $x \in \mathscr{H}$. Zeigen Sie, dass $T_n^*x \to T^*x$ für alle $x \in \mathscr{H}$ gilt.

Aufgabe 1.3 Sei der Operator A auf ℓ^2 definiert durch

$$A : D(A) \subset \ell^2 \to \ell^2, \quad a \mapsto i\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

wobei der Definitionsbereich gegeben ist durch

$$D(A) := \left\{a \in \ell^2 : \text{es ex. } N \in \mathbb{N} \text{ mit } a_k = 0 \text{ f. a. } k > N \text{ und } \sum_{k=1}^{N} a_k = 0\right\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass A dicht definiert ist und stellen Sie A als halb-unendliche Matrix dar.

(ii) Zeigen Sie, dass A symmetrisch ist und $\overline{R(A+i)} = \ell^2$ gilt.

(iii) Zeigen Sie $\overline{R(A-i)} \neq \ell^2$.

Hinweis: Die Quantenmechanik nach Schrödingers Theorie, wie sie für gewöhnlich gelehrt wird, findet auf dem Grundraum L^2 statt. Heisenberg dagegen entwickelte parallel zu Schrödinger eine Theorie der Quantenmechanik auf dem Grundraum ℓ^2. Die beiden Theorien wurden als konkurrierend angesehen, bis deren Äquivalenz bewiesen wurde.

Aufgabe 1.4 Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung aller rationaler Zahlen in $[0,1]$. Zeigen Sie: Definiert man

$$\begin{aligned} Q : \ell^2 &\to \ell^2, \\ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} &\mapsto (q_i x_i)_{i\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

so gilt $\sigma(Q) = [0,1]$, $\sigma_p(Q) = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma_r(Q) = \emptyset$ und $\sigma_c(Q) = [0,1] \setminus \sigma_p(Q)$.

Abgabetermin: Donnerstag 3. November 2011, in der Vorlesung.