Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 7

K ist überall ein beliebiger Körper.

Aufgabe 1
(5 Punkte)
Seien $A, B \in K^{n\times n}$.

(a) Zeigen Sie: falls $(I_n - AB)$ invertierbar ist, gilt

$$(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A)(I_n - BA) = I_n.$$

(b) Zeigen Sie, dass AB und BA die gleichen Eigenwerte haben.

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Definition: Sei $A \in K^{n\times n}$. "A diagonalisieren" bedeutet, n Elemente $d_1, \ldots, d_n \in K$ und eine Matrix $P \in K^{n\times n}$ zu finden, so dass $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$

Seien $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ beide in $\mathbb{R}^{3\times 3}$
Diagonalisieren Sie A und B.

Aufgabe 3
(5 Punkte)
Diese Aufgabe ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe 1.b) aus Blatt 5.

(a) Sei $A[X] \in K[X]^{n\times n}$, $r := rang(A(0))$.
Zeigen Sie, dass $X^{n-r} \mid \det(A[X])$.
Hinweis: Betrachten Sie die reduzierte Zeilenstufenform von $A(0)$.

(b) Wie folgert man die Behauptung 1.b) in Blatt 5 daraus?

Aufgabe 4
(5 Punkte)
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $T : V \to V$ eine lineare Abbildung und $g \in K[X]$.

(a) Sei d ein Eigenwert von T und x ein Eigenvektor zu d. Zeigen Sie, dass $g(d)$ ein Eigenwert von $g(T)$ ist und finden Sie einen Eigenvektor zu $g(d)$.

(b) Zeigen Sie, dass $g(T)$ diagonalisierbar ist, falls T diagonalisierbar ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte
(2 extra Punkte)
Eine reelle stochastische Matrix ist eine Matrix $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass:

- *Für alle $i, j \in \{1, \dots n\}$ gilt $a_{ij} \geq 0$.*
- *Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.*

Stochastische Matrizen erscheinen in Wahrscheinlichkeitstehorie, zum Beispiel in Zusammenhang mit Markovketten.
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stoschastische Matrix und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A.

(a) Zeigen Sie, dass $|\lambda| \leq 1$.

Wir nehmen jetzt an, dass $|\lambda| = 1$. Wir nehmen einen Eigenvektor $X = (x_1, \dots, x_n)$ zum Eigenwert λ und wählen eine Koordinate x_i von X von maximalem Betrag, d.h. $|x_i| = max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

(b) Zeigen Sie: $|\lambda - a_{ii}| = \sum_{j\neq i} a_{ij} |\frac{x_j}{x_i}| = \sum_{j\neq i} a_{ij}$.

(c) Folgern Sie aus b), dass $\lambda = 1$, falls $a_{kk} \neq 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

(d) Folgern Sie aus b), dass λx_i auch eine Koordinate von X von maximalem Betrag ist.

(e) Zeigen Sie, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass λ eine m-te Einheitswurzel ist, d.h. $\lambda^m = 1$.

Abgabe: Donnerstag, 2. Juni 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.