Matthias Makowski, Martin Franzen Universität Konstanz Sommersemester 2013

Übungen zur Vorlesung Elementare Differentialgeometrie

Blatt 7

Aufgabe 7.1. (4 Punkte)
Sei $\alpha \in C^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ eine *Frenet-Kurve*, d. h. für alle $t \in [a,b]$ sind die Vektoren $\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(n-1)}(t)$ linear unabhängig. Zeige, dass es n Vektorfelder $e_i \in C^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $1 \le i \le n$, mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(i) Für jedes $t \in [a,b]$ bilden die Vektoren $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis mit $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$.
(ii) Für $i = 1, \dots, n-1$ gilt $\langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle \alpha', \dots, \alpha^{(i)} \rangle$ und $\langle e_i, \alpha^{(i)} \rangle > 0$.

Die Vektorfelder $e_1, \dots, e_n$ sind also ein längs α begleitendes n-Bein.

Aufgabe 7.2. (4 Punkte)
Sei $\alpha \in C^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte *Frenet-Kurve* und sei $e_1, \dots, e_n$ ein längs α begleitendes n-Bein. Zeige, dass es $n-1$ Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} \in C^\infty([a,b],\mathbb{R})$ mit

$$(e_1' \, e_2' \, \dots \, e_n') = (e_1 \, e_2 \, \dots \, e_n) \cdot A$$

gibt, wobei $A \in C^\infty([a,b],\mathbb{R}^{n\times n})$ die schiefsymmetrische Matrix ist, auf deren oberer/unterer Nebendiagonale sich die Elemente $\pm\kappa_1$ bis $\pm\kappa_{n-1}$ befinden und deren sonstige Einträge Null sind. Zeige weiterhin, dass die Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}$ positiv sind. Wir bezeichnen die Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ als *Frenet-Krümmungen*.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen13.html#ELDG`
Abgabe: Bis Mittwoch, 12.06.2013, 15.15 Uhr, in der Vorlesung.