Oliver Schnürer, Matthias Makowski, Marcello Sani — Universität Konstanz — Sommersemester 2011

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra 2

Blatt 12

Aufgabe 12.1. (*zusätzlich* 4 Punkte)
Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 2&2&3&3&0&0&0&0&0&0&0\\ 4&5&6&4&0&0&0&0&0&0&0\\ 2&3&6&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&5&5&5&4&0&3&4\\ 0&0&0&0&1&6&3&4&2&3&6\\ 0&0&0&0&5&5&3&1&2&6&2\\ 0&0&0&0&3&0&4&2&5&5&2\\ 0&0&0&0&5&0&3&5&3&2&1\\ 0&0&0&0&0&0&2&4&2&2&1\\ 0&0&0&0&4&1&5&2&1&5&0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^{11\times 11}.$$

Wie lautet das Minimalpolynom von A?

Aufgabe 12.2. (*zusätzlich* 4 Punkte)

(i) Überprüfen Sie anhand eines Kriteriums aus der Vorlesung, ob sich die beiden Matrizen durch die Wahl einer geeigneten Orthonormalbasis gleichzeitig diagonalisieren lassen und führen Sie dies gegebenenfalls mit Angabe der Transformationsmatrizen aus.

$$C = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 2&0&0\\ 0&2&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(ii) Überprüfen Sie anhand eines Kriteriums aus den Übungen, ob sich die beiden Matrizen durch die Wahl einer geeigneten Basis gleichzeitig diagonalisieren lassen und führen Sie dies gegebenenfalls mit Angabe der Transformationsmatrizen aus.

$$C = \begin{pmatrix} 5&2&-2\\ 2&2&4\\ 1&-2&8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 11&-10&22\\ -7&14&-17\\ -8&10&-19 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Aufgabe 12.3. (*zusätzlich* 4 Punkte)
Bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ definiert die Matrix

$$\begin{pmatrix} 63&90&234&0\\ 18&108&-100&-60\\ 234&-212&-272&-3\\ -96&-84&3&52 \end{pmatrix}$$

eine Bilinearform. Bestimmen Sie

(i) die zugehörige quadratische Form,
(ii) die Darstellungsmatrix der symmetrischen Bilinearform φ mit derselben quadratischen Form,
(iii) eine Orthonormalbasis und die zugehörige Transformationsmatrix, so dass φ bezüglich dieser Basis durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird und
(iv) eine Basis und die zugehörige Transformationsmatrix von der Standardbasis aus, so dass φ durch eine Matrix wie im Sylvesterschen Trägheitssatz dargestellt wird.

Hinweis: Die Eigenwerte der Darstellungsmatrix der symmetrischen Bilinearform sind durch $\{0, 196, -441\}$ gegeben.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/~makowski/veranstaltungen11.html#LAII`
Abgabe: Bis Dienstag, 12.07.2011, 10.00 Uhr, in die Briefkästen bei F 411.