Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel
Daniel Plaumann
Sommersemester 2008

LINEARE ALGEBRA II

10. Übungsblatt
Abgabe bis spätestens Freitag, den 27. Juni 2008, 10:00 Uhr
in den entsprechenden Briefkasten

37. Sei $n \geq 1$ und β eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf dem Vektorraum $\mathbb{F}_3^n$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{F}_3^n$ gibt, so dass die darstellende Matrix $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\beta)$ eine der beiden Matrizen

$$E_n \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist.

38. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und β eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeigen Sie: Sind U und W zwei Unterräume von V derart, dass $\beta|_U$ positiv definit und $\beta|_W$ negativ semidefinit ist, so gilt $U \cap W = \{0\}$.

39. (*Sylvesterscher Trägheitssatz*) Für eine Diagonalmatrix A mit reellen Einträgen bezeichne p_A die Anzahl der positiven (> 0) und m_A die Anzahl der negativen (< 0) Diagonaleinträge von A.
Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und β eine symmetrische Bilinearform auf V. Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V derart, dass die darstellenden Matrizen $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\beta)$ und $B := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\beta)$ Diagonalgestalt haben. Zeigen Sie:

$$p_A = p_B \qquad \text{und} \qquad m_A = m_B.$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie die vorige Aufgabe).
Man schreibt $p_\beta := p_A$ und $m_\beta := m_A$. Das Paar (p_β, m_β) heißt die *(Sylvester-)Signatur*, die Differenz $p_\beta - m_\beta$ der *Trägheitsindex* von β.

40. Zwei Bilinearformen β_1, β_2 auf einem endlich-dimensionalen K-Vektorraum V heißen *äquivalent*, wenn es Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von V gibt derart, dass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\beta_1) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(\beta_2)$ gilt.

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Beweisen Sie:

(a) Zwei symmetrische Bilinearformen, die dieselbe Signatur besitzen, sind äquivalent.
(b) Zwei nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearformen, die denselben Trägheitsindex besitzen, sind äquivalent.