Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. G. Warnecke, Dipl.-Math. Ferdinand Thein

17. Mai 2018

Einführung in die Numerik

Sommersemester 2018

6. Übung

Hinweis: In den folgenden Aufgaben bezeichnet x^k jeweils die k-te Iterierte eines Iterationsverfahrens, nicht etwa eine k-te Potenz.

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.** Um die Konvergenz der Iteration $x^{k+1} = \Phi(x^k)$ für eine Fixpunktaufgabe $x = \Phi(x)$, $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mit dem Banachschen Fixpunktsatz zu zeigen, benötigt man die folgenden Voraussetzungen:

- Es gilt $\Phi(D) \subset D$ für ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^N$.
- Es gibt eine Vektornorm $\|\cdot\|$, so dass $\|\Phi(x)-\Phi(y)\| \leq \alpha\|x-y\|$, $\alpha < 1$ für beliebige $x, y \in D$ gilt. (Φ ist „kontrahierend".)

(a) Sei $J(x)$ die Jacobi-Matrix von Φ und $\|\cdot\|$ eine beliebige einer Vektornorm zugeordnete Matrixnorm. Zeigen Sie, dass die Kontraktionsbedingung erfüllt ist, wenn $\|J(x)\| \leq L < 1$ für alle $x \in D$ gilt.

(b) Geben Sie für das System

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{10}x_1^2 + \sin x_2 \\
x_2 &= \cos x_1 + \frac{1}{10}x_2^2
\end{aligned}
$$

ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ und eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ an, so daß die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind.

(c) Man löse das System durch Fixpunktiteration. Die numerische Konvergenzordnung lässt sich aus drei aufeinanderfolgenden Iterationen bestimmen, wenn die exakte Lösung ξ bekannt ist, da für ein Verfahren p-ter Ordnung

$$
\|x^{k+1} - \xi\| \approx C\|x^k - \xi\|^p, \; k = 0, 1, \ldots
$$

gilt. Die daraus bestimmbare Näherung für p ist die numerische Konvergenzordnung $\tilde{p}$. Für die Fixpunktiteration stelle man $\tilde{p}$ in Abhängigkeit von k graphisch dar. Als exakte Lösung ξ verwende man eine hinreichend genaue Iteration x^k, $k \gg 1$.

(d) Man löse das Gleichungssystem mit dem Newton-Verfahren und vergleiche die Konvergenz beider Verfahren.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.** Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^x + y &= 100 \\ x + e^y &= 200 \end{aligned}$$

(a) Geben Sie ein Iterationverfahren zur näherungsweisen Lösung an und zeigen Sie so mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass das Geichungsystem genau eine Lösung $X^* := (x^*, y^*)$ in $[1, 10] \times [1, 10]$ besitzt.
Hinweis: Benutzen Sie die Maximumsnorm $\| \cdot \|_\infty$.

(b) Bestimmen Sie mit dem Iterationsverfahren eine Näherungslösung $\tilde{X} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ so genau, dass

$$|e^{\tilde{x}} + \tilde{y} - 100| < 10^{-4}\,, \quad |\tilde{x} + e^{\tilde{y}} - 200| < 10^{-4}\,.$$

(c) Geben Sie eine a-priori- und a-posteriori-Fehlerabschätzung für $\|\tilde{X} - X^*\|_\infty$ an.

(Die Aufgaben sind am 24. Mai 2018 in der Übung abzugeben.)