

Hans-Dieter SILL, Rostock

Zu Problemen einer sinnvollen Genauigkeit

Im Mathematikunterricht der DDR wurden Fragen einer sinnvollen Genauigkeit bis zur Lehrplanreform in den 80er-Jahren fast ausschließlich aus innermathematischer Sicht betrachtet. Erst danach wurden sie als ein generelles Problem der Anwendung von Mathematik aufgefasst und auf der Grundlage einer Konzeption von FANGHÄNEL und NAUCK [1] mit konkreten Inhalten in den gesamten Lehrgang implementiert. Begleitend zu den Lehrplan- und Lehrbuchänderungen sowie Fortbildungsmaßnahmen wurden allein 1987/88 17 Artikel vor allem von FLADE und PRUZINA in der *Mathematik in der Schule* veröffentlicht, die in [2] eine Zusammenfassung ihrer Ergebnisse vornahmen. Ansonsten wurden bisher Probleme des Arbeitens mit Näherungswerten und sinnvoller Genauigkeit in der didaktischen Literatur kaum diskutiert. Die Erfahrungen im Mathematikunterricht der DDR weisen auf viele fachliche, epistemologische und methodische Schwierigkeiten hin.

1. Begriffe, Verfahren und Regeln

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Beziehungen zwischen einem genauen (exaktem, wahren) Wert x und einem Näherungswert (NW) x^* zu charakterisieren bzw. anzugeben, wobei die Bezeichnungen in der mathematischen bzw. der Schulbuchliteratur unterschiedlich sind. Die Differenz $x^* - x$ (oder $x - x^*$), deren Wert in der Regel nicht bekannt ist, wird als *wahrer* (absoluter) Fehler bezeichnet. Eine obere Schranke bzw. die kleinste obere Schranke A_{x^*} für $|x - x^*|$ heißt *absoluter Fehler* (absoluter Höchstfehler). Die Vorstellungen zum Begriff Genauigkeit sind meist mit dem absoluten Fehler, d.h. bei Dezimalbrüchen mit der Anzahl der Dezimalstellen verbunden.

Eine weitere Charakteristik der Genauigkeit ist durch den *relativen Fehler* (relativen Höchstfehler) $A_{x^*}/|x|$ möglich. Die Genauigkeit eines NW kann explizit durch die Angabe einer Fehlercharakteristik oder implizit durch die Anzahl der Ziffern angegeben werden. Eine Ziffer heißt *gültig* (wahr, zuverlässig), wenn sie mit der entsprechenden Ziffer im wahren Wert übereinstimmt. Eine Ziffern wird *zuverlässig* (gültig) genannt, wenn der absolute Fehler kleiner ist als das ω -fache ihres Stellenwertes ($0,5 \leq \omega \leq 1$, wobei meist $\omega = 0,5$ gewählt wird). *Wesentlich* (geltend, signifikant, tragend) heißen alle Ziffern, die zuverlässig sind, außer den Nullen links von der ersten von Null verschiedenen Ziffer. Im Mathematikunterricht kann auf die Ein-

führung von Bezeichnungen für die Ziffern verzichtet werden. Der Inhalt der Begriffe lässt sich durch Beispiele erfassen.

Um die Genauigkeit des Ergebnisses einer Rechnung mit Näherungswerten ausgehend von der Genauigkeit der Ausgangswerte zu ermitteln, können in der Schule 4 Verfahren verwendet werden:

- a) Schriftliches Rechnen mit Fragezeichen für unbekannte Ziffern bzw. Markieren der unsicheren Ziffern und der mit ihnen berechneten Ziffern
Dieses mathematisch nicht exakte Verfahren, das nur für die Grundrechenarten anwendbar ist, liefert keine Fehlerschranken, macht aber die Unsinnigkeit der Angabe vieler Ziffern im Ergebnis einsichtig.
- b) Methode der Wertschranken
Die Rechnung wird zweimal durchgeführt, um unter Verwendung der Wertschranken für die NW eine obere und untere Schranke zu ermitteln. Das Verfahren liefert stets exakte Schranken, lässt sich effektiv nur mit dem Taschenrechner durchführen und ist auch bei komplexen Rechnungen und höheren Rechenarten anwendbar. Es versagt, wenn gleichzeitig die obere und untere Wertschranke einzusetzen ist (z.B. Volumen eines Kegels mit der Formel $V = \pi r^2 \sqrt{s^2 - r^2}$)
- c) Methode der Fehlerschranken
Für einfache Terme ist in der Schule auch eine Rechnung mit Fehlerschranken möglich. (z.B. $(a \pm \Delta a)^2$). Damit lässt sich z.B. die verbreitete Fehlvorstellung überwinden, dass sich die (absolute) Genauigkeit des Ergebnisses nach dem (absolut) ungenauesten Ausgangswert richtet. Für beliebige Terme sind Mittel der höheren Mathematik erforderlich. Man erhält außerdem nur Näherungswerte für die Fehlerschranken.
- d) Methode der Ziffernzählung
Aus Sätzen über den absoluten Höchstfehler und wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen hat BRADIS [3] u.a. folgende Regeln zum Rechnen mit Näherungswerten gewonnen:
 1. Bei der Addition und Subtraktion sind im Resultat nur so viele Dezimalstellen beizubehalten, wie in dem Ausgangswert mit kleinster Anzahl von Dezimalstellen vorhanden sind.
 2. Bei der Multiplikation und Division sind im Resultat nur so viele wesentliche Ziffern beizubehalten, wie in dem Ausgangswert mit kleinster Anzahl von wesentlichen Ziffern vorhanden sind.
 3. Bei der Berechnung der 2. und 3. Potenz bzw. der Quadrat- oder Kubikwurzel sind im Resultat nur so viele wesentliche Ziffern beizubehalten, wie in der Basis bzw. dem Radikanden enthalten sind.

Diese Regeln gelten analog auch für mehrschrittige Berechnungen, wenn zwischendurch mit mindestens einer wesentlichen Ziffer mehr, als die Regeln angeben, gearbeitet wird.

2. Berücksichtigung von Problemen einer sinnvollen Genauigkeit in Lehrplänen und Lehrbüchern

In die Analyse einbezogen wurden die Rahmenpläne für die S I von Berlin (BE), Hessen (HE) und Schleswig-Holstein (SH), die Gymnasiallehrpläne von Brandenburg (BB), Mecklenburg-Vorpommern (MV), Sachsen (SN), Sachsen-Anhalt (ST) und Thüringen (TH) sowie aus Nordrhein-Westfalen die Pläne für das Gymnasium (NWG), für die Gesamtschule (NWGS) und die Realschule (NWR).

LP/RP	Allgemeine Teile	Kl. 5/6	Kl. 7/8	Kl. 9/10	Summe
BE	2	0	0	0	2
BB	0	3	2	2	7
HE	1	2	1	0	4
MV	1	4	1	0	6
NWG	1	1	0	0	2
NWGS	0	0	0	0	0
NWR	1	1	0	1	3
SH	0	0	0	0	0
SN	0	0	1	2	3
ST	2	2	2	1	7
TH	0	0	0	0	0

Die Analyse zeigt, dass in Lehrplänen vor allem der alten Bundesländer kaum auf Fragen der sinnvollen Genauigkeit eingegangen wird und insbesondere spezielle Ziele selten genannt werden. Dies verwundert umso mehr, da die Zahl das einfachste mathematische Modell darstellt, die meisten Angaben in Sachaufgaben einen Näherungscharakter haben und Fragen eines anwendungsorientierten und lebensverbundenen Unterrichts ansonsten einen hohen Stellenwert besitzen.

Eine Analyse von 25 Lehrbuchreihen der Klassen 5 bis 10 aller Schularten bestätigt das Fehlen dieser wesentlichen Seite einer mathematischen Kultur im Mathematikunterricht. Nur in 4 Reihen wurde überhaupt in einem der Bücher auf das Rechnen mit Näherungswerten eingegangen, wobei zudem noch die formalen Aspekte im Mittelpunkt standen. In fast allen Bücher wird permanent gegen Regeln und Prinzipien einer sinnvollen Genauigkeit verstoßen. Bereits in der Aufgabenstellungen wird dieser Aspekt in der Regel nicht beachtet, sodass vor vornherein keine Betrachtungen zur sinnvollen Genauigkeit des Ergebnisse möglich sind.

3. Wechselverhältnisse bei der Entwicklung des Könnens im Arbeiten mit Näherungswerten und sinnvoller Genauigkeit

Die Hauptursache für die erheblichen Schwierigkeiten im Umgang mit der Thematik im Unterricht liegt im komplizierten epistemologischen Status des Unterrichtsgegenstandes. Der Gegenstand selbst ist im Unterschied zu der Mehrzahl der Unterrichtsgegenstände nur als widersprüchliches Wechselverhältnis zu erfassen. Es geht um das Verhältnis von exakter und ungefähre Angabe von Zahlen und Größen, wobei zudem zwischen der rein innermathematischen Existenz des Wechselverhältnisse und seiner Existenz als Teil des Verhältnisses von realen Erscheinungen und ihrer mathematischen Widerspiegelung unterschieden werden muss.

Es lassen sich zwei Sachverhaltsgruppen unterscheiden, das Phänomen der Näherungswerte und das Phänomen der Genauigkeit beim Rechnen mit Näherungswerten, die jeweils wiederum durch ein vielschichtiges Wechselverhältnis von formalen und inhaltlichen Aspekten charakterisiert sind.

So kann bei der Ermittlung einer sinnvollen Genauigkeit des Ergebnisses einer Rechnung mit Näherungswerten nicht allein von der formalen Betrachtung des Einflusses der Fehler der Ausgangswerte auf den Fehler des Ergebnisses ausgegangen werden, sondern es sind u.a. noch folgende inhaltlichen Aspekte zu beachten:

- die verwendeten Rechenhilfsmitteln
- Genauigkeitsforderungen, die sich aus der Aufgabenstellung oder dem Sachverhalt ergeben,
- geltenden Vorschriften oder Konventionen,
- Fehler, die durch das verwendete Modell entstehen.

Literatur:

- [1] Fanghänel, G.; Nauck, H.: Zum Arbeiten mit Näherungswerten im Mathematikunterricht. – In: Math. Schule.- Berlin 18(1980)11. - S. 589 – 596
- [2] Flade L.; Pruzina M.: Zur Resultatsangabe mit sinnvoller Genauigkeit. – In: mathematik lehren. – Heft 45.- S. 36 – 44
- [3] Bradis, W. M.: Kopfrechnen und schriftliches Rechnen. Hilfsmittel für das Rechnen. - In: Enzyklopädie der Elementarmathematik /Hrsg. Grell, H.; Maruhn, K.; Rinow, W. – Band 1: Arithmetik/ Redaktion Alexandrow, P. S., Markuschewitsch, A. I.; Chintschin, A. J. – Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1970