7.5 Abelsche Gruppen, Normalform von Matrizen

Wie wir bereits gesehen haben, kann man solche direkten Zerlegungen, deren Existenz in 7.4.9 nachgewiesen wurde, ggf. aus Zerlegungen der Eins in zentrale orthogonale Idempotente bekommen. Es folgen zwei sehr wichtige Anwendungsbeispiele. Interessant ist insbesondere, daß die Herleitungen der beiden Resultate im wesentlichen die gleichen Argumente verwenden!

7.5.1 Der Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen *Jede endliche abelsche Gruppe ist direkte Summe zyklischer Untergruppen von Primzahlpotenzordnung.*

Beweis: $(A,+)$ seieine endliche abelsche Gruppe, $n := |A| > 1$. A ist, wie bereits erwähnt, ein $\mathbb{Z}$-Modul,

$$za := \begin{cases} a + \ldots + a, & z\text{-mal, falls } z \geq 0, \\ -a - \ldots - a, & (-z)\text{-mal, falls } z < 0. \end{cases}$$

Wegen $na = 0$ kann A auch als $\mathbb{Z}_n$-Modul aufgefaßt werden, vermöge

$$\bar{z}a := za, \text{ falls } \bar{z} = z + (n) \in \mathbb{Z}_n, 0 \leq z < n.$$

Nun sei wieder $n = \prod_i p_i^{a_i}$ die Primfaktorzerlegung von n, $n_i := n/p_i^{a_i}$, $z_i \in \mathbb{Z}^*$ mit $\sum_i n_i z_i = 1$, $e_i := n_i z_i$, $\bar{e}_i := e_i + (n) \in \mathbb{Z}_n$. Wie oben bereits diskutiert, sind die $\bar{e}_i$ zentrale orthogonale Idempotente, die eine Zerlegung der Eins in $\mathbb{Z}_n$ bilden, $\sum_i \bar{e}_i = \bar{1}$, und wir erhalten daraus direkte Zerlegungen $\mathbb{Z}_n = \oplus_i \bar{e}_i \mathbb{Z}_n$ sowie

$$A = \oplus_i e_i A = \oplus_i \bar{e}_i A.$$

Die erste der beiden direkten Summen ist eine Zerlegung von A als $\mathbb{Z}$-Modul, die zweite ist eine Zerlegung von A als $\mathbb{Z}_n$-Modul. Die Summanden sind dabei, als Teilmengen von A, gleich: $e_i A = \bar{e}_i A$.
Die $e_i A$ sind sogar $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$-Moduln, denn $p_i^{a_i} e_i A = n z_i A = 0$. Die Ringe $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$ sind einreihig, nach 7.4.9 ist also $e_i A$ eine direkte Summe zyklischer Untermoduln. Diese haben, als Faktormoduln von $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$, als Ordnung eine Potenz von p_i.

□

Analog verläuft der Beweis von

7.5.2 Die Jordansche Normalform einer quadratischen Matrix *Jede quadratische Matrix endlicher Reihenzahl über einem algebraisch abgeschlossenen Zahlkörper kann auf Blockdiagonalgestalt transformiert werden, wobei die Blöcke die folgende Form haben*

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

mit einem Eigenwert λ der betrachteten Matrix.

Beweis: A sei eine $n \times n$-matrix über $\mathbb{K}$, einem algebraisch abgeschlossenen Körper (d. h. jedes Polynom in $\mathbb{K}[x]$ zerfällt in Linearfaktoren.

i) Der Vektorraum $\mathbb{K}^n$ wird zu einem $\mathbb{K}[x]$-Modul, wenn wir die Operation eines Polynoms $\sum_i \kappa_i x^i$ als Anwendung der linearen Abbildung definieren, die durch Einsetzen der Matrix in das Polynom entsteht:

$$\Big(\sum_i \kappa_i x^i\Big) \cdot v := \sum_i \kappa_i A^i \cdot v.$$

ii) Ist jetzt E_j der j-te Einheitsvektor, $0 \leq j \leq n-1$, dann hat (aus Dimensionsgründen) der Epimorphismus

$$\mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]E_j\,,\ \Big(\sum_i \kappa_i x^i\Big) \mapsto \Big(\sum_i \kappa_i x^i\Big) \cdot E_j = \sum_i \kappa_i A^i \cdot E_j$$

einen nicht trivialen Kern, also ein Ideal, das von einem normierten Polynom vom Grad > 0 erzeugt wird. Es folgt

$$\mathbb{K}[x]E_j \simeq \mathbb{K}[x]/(q_j).$$

iii) Der Vektorraum $\mathbb{K}^n$ wird vom Produkt $q = q_0 \cdots q_{n-1}$ der diese Kerne erzeugenden Polynome q_i annulliert und kann deshalb als $\mathbb{K}[x]/(q)$-Modul aufgefaßt werden. Ist jetzt $q = \prod_i p_i^{a_i}$ die Primfaktorzerlegung von q, mit normierten unzerlegbaren und paarweise verschiedenen Polynomen p_i, dann erhalten wir — ganz wie im Beweis des Hauptsatzes über abelsche Gruppen — aus den teilerfremden $r_i := q/p_i^{a_i}$ eine Zerlegung der Eins:

$$1 = \sum_i r_i s_i,\ \ s_i \in \mathbb{K}[x]^*.$$

Die Restklassen $\bar{e_i}$ der Summanden e_i, also

$$\bar{e_i} := r_i s_i + (q),$$

sind zentrale orthogonale Idempotente mit

$$\mathbb{K}^n = \oplus_i \bar{e_i}\mathbb{K}^n = \oplus_i e_i \mathbb{K}^n,$$

sowie $\bar{e_i}\mathbb{K}^n = e_i\mathbb{K}^n$.
Der Unterraum $e_i\mathbb{K}^n$ ist $\mathbb{K}[x]/(p_i^{a_i})$-Modul also Modul über einem einreihigen Ring und deshalb Summe von Unterräumen U_{ij}, die zyklische $\mathbb{K}[x]/(p_i^{a_i})$-Moduln sind, d. h. isomorph zu Faktormoduln nach den Idealen dieses Rings:

$$U_{ij} = \mathbb{K}[x]u_{ij} \simeq \mathbb{K}[x]/(p_i^{a_i})/(p_i^{b_{ij}})/(p_i^{a_i}) \simeq \mathbb{K}[x]/(p_i^{b_{ij}}).$$

Insgesamt haben wir also die folgende Zerlegung von $\mathbb{K}^n$ als direkte Summe erhalten:

$$\mathbb{K}^n = \oplus_i \oplus_j \mathbb{K}[x]u_{ij}.$$

Es bleibt die Wirkung der Matrix A auf Basen dieser Unterräume $\mathbb{K}[x]u_{ij}$ zu berechnen.
Wir verwenden dazu die Voraussetzung, daß $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist, die unzerlegbaren Polynome, insbesondere auch die p_i, sind also linear: $p_i = x - \lambda_i$, für ein geeignetes $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Die Potenzen p_i^k, $0 \leq k \leq b_{ij} - 1$, bilden also eine Basis von $\mathbb{K}[x]/(p_i^{b_{ij}}) \simeq U_{ij}$. Es gilt also

$$U_{ij} = \ll u_{ij}, p_i u_{ij}, p_i^2 u_{ij}, \ldots, p_i^{b_{ij}-1} u_{ij} \gg .$$

Wir brauchen jetzt nur noch zu bemerken, daß

$$A p_i^k u_{ij} = x p_i^k u_{ij} = \lambda_i p_i^k u_{ij} + p_i^{k+1} u_{ij},$$

Die Matrix der Einschränkung von A auf den Unterraum U_{ij} hat also wirklich die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Dabei zeigt die letzte Spalte dieser Matrix, daß λ_i tatsächlich ein Eigenwert von A ist.

$\square$