Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 12

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2018

Abgabe am 9.7.2018

Aufgabe 34

a) Wir beschreiben die Punkte des $\mathbb{R}^3$ durch *Zylinderkoordinaten*, d.h. wir betrachten $f:\ U := (0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow V := \mathbb{R}^3 \setminus ([0,\infty) \times \{0\} \times \mathbb{R})$ mit

$$f(r,\varphi,z) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z).$$

Zeigen Sie, dass $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

b) Wir beschreiben die Punkte des $\mathbb{R}^3$ durch *Kugelkoordinaten*, d.h. wir betrachten $\phi:\ U' := (0,\infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0,2\pi) \longrightarrow V = \mathbb{R}^3 \setminus ([0,\infty) \times \{0\} \times \mathbb{R})$ mit

$$\phi(r,u,v) := (r\cos(u)\cos(v), r\cos(u)\sin(v), r\sin(u)).$$

Zeigen Sie, dass $\phi : U' \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

Hinweis: Die Bijektivität von f und ϕ können Sie ohne Beweis voraussetzen, das hatten wir in der Vorlesung geometrisch begründet. (Vollziehen Sie diese Begründungen beim Nacharbeiten der Vorlesung für sich selbst nochmal nach).

8 P

Aufgabe 35

Sei $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung

$$\Psi(x,y) := (xy, x^4 - y^4).$$

a) Zeigen Sie, dass Ψ um jeden Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

b) Bestimmen Sie für den (lokalen) Diffeomorphismus $\widetilde{\Psi} := \Psi|_U : U \to V$ um den Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ die partiellen Ableitungen der Umkehrfunktion $\widetilde{\Psi}^{-1} : V \to U$ und das Differential $(d\widetilde{\Psi}^{-1})_{\Psi(x,y)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

c) Ist $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein globaler Diffeomorphismus?

8 P

—- bitte wenden —-

Aufgabe 36

Wir betrachten die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\phi(x, y) := (2e^x - x^2, x + y).$$

a) Zeigen Sie, dass ϕ bijektiv ist.
Tipp: Überlegen Sie sich zuerst, dass die Funktion $\phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi_1(x) := 2e^x - x^2$ bijektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass ϕ ein Diffeomorphismus ist.

c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Umkehrabbildung ϕ^{-1} im Punkt $(2, 0)$.

8 P

Insgesamt: **24 P**