Das Problem :

Bewiesen werden soll die Quotientenregel

$$\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{\left[h(x)\right]^2}$$

Gegeben :

Gegeben sind Zähler und Nenner, also g(x) und h(x).
Indirekt sind auch noch die Ableitungen $g'(x)$ *und* $h'(x)$
gegeben, die man durch Ableiten ermitteln kann.

Beweisidee :

Die Beweisidee besteht darin, dass man sowohl die gesuchte Ableitung $\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]'$ *als auch die beiden gegebenen Ableitungen* $g'(x)$ *und* $h'(x)$ *ausführlich aufschreibt, und zwar mit Hilfe der Grundformel der Differentialrechnung, nämlich der Formel des Differentialquotienten:*

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$ *Differentialquotient einer Funktion f(x)*

Die vier gegebenen Werte lauten dann:

$$\boxed{g(x)},\ \boxed{h(x)},\ \boxed{g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}},\ \boxed{h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}}$$

Und die gesuchte Ableitung lautet dann:

$$\boxed{\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\dfrac{g(x+\Delta x)}{h(x+\Delta x)} - \dfrac{g(x)}{h(x)}}{\Delta x}\right]}$$ *Gesuchte Ableitung*

Jetzt muß man nur noch die gesuchte Ableitung in einen Term umformen, in dem nur noch die vier gegebenen Werte vorkommen.

Schritt 1 :

Auf dieser Seite wollen wir zunächst nur den Doppelbruch beseitigen. Dies ist ein logischer Ansatz, denn in den vier gegebenen Werten :

$\boxed{g(x)}$, $\boxed{h(x)}$, $\boxed{g'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}$ *und* $\boxed{h'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}}$

kommt ja kein Doppelbruch vor. Der Doppelbruch muß also weg. Dazu erweitern wir beide Brüche so, dass sie gleichnamig werden. Die gleichnamigen Brüche dürfen wir dann auf einen Bruchstrich, und dann müssen wir nur noch eine Regel aus der Bruchrechnung anwenden. Die Schritte im einzelnen :

Zu Erinnerung: Die gesuchte Ableitung war:

$$\boxed{\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\frac{g(x+\Delta x)}{h(x+\Delta x)} - \frac{g(x)}{h(x)}}{\Delta x}\right]}$$

Erweitern mit h(x) bzw. $h(x+\Delta x)$ *ergibt:*

$$\boxed{\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\frac{g(x+\Delta x)\cdot \mathbf{h(x)}}{h(x+\Delta x)\cdot \mathbf{h(x)}} - \frac{g(x)\cdot \mathbf{h(x+\Delta x)}}{h(x)\cdot \mathbf{h(x+\Delta x)}}}{\Delta x}\right]}$$

Die nun gleichnamigen Brüche darf man auf einen Bruchstrich schreiben:

$$\boxed{\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h(x+\Delta x)}{h(x+\Delta x)\cdot h(x)}}{\Delta x}\right]}$$

Regel aus Bruchrechnung anwenden: Man dividiert durch einen Term (hier: Δx *), indem man mit dem Kehrwert multipliziert:*

$$\boxed{\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h(x+\Delta x)}{h(x+\Delta x)\cdot h(x)} \cdot \frac{1}{\Delta x}\right]}$$

Unser Teilziel ist erreicht: Der Doppelbruch ist beseitigt.

Schritt 2 :

Zur Erinnerung: Dies ist die letzte Formel der vorigen Seite:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h(x+\Delta x)}{h(x+\Delta x)\cdot h(x)}\cdot\frac{1}{\Delta x}\right]$$

Wir vertauschen die Nenner, sodass wir einen Grenzwert berechnen können. Zuerst Brüche multiplizieren, dann die Nenner vertauschen und drittens die Brüche wieder auseinander schreiben:

Multiplikation durchführen:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h(x+\Delta x)}{h(x+\Delta x)\cdot h(x)\cdot \Delta x}\right]$$

Nenner vertauschen:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot h(x+\Delta x)\cdot h(x)x}\right]$$

Brüche wieder auseinander schreiben:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h(x+\Delta x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{h(x+\Delta x)\cdot h(x)x}\right]$$

Jetzt einen Grenzwertsatz anwenden: Der Grenzwert eines Produktes ist gleich dem Produkt der Grenzwerte der einzelnen Faktoren:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h(x+\Delta x)}{\Delta x}\right]\bullet\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{h(x+\Delta x)\cdot h(x)x}\right]$$

Den rechten Grenzwert bilden:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h(x+\Delta x)}{\Delta x}\right]\bullet\frac{1}{\left[h(x)\right]^2}$$

Jetzt den Term wieder als Doppelbruch schreiben:

$$\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\dfrac{g(x+\Delta x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h(x+\Delta x)}{\Delta x}\right]}{\left[h(x)\right]^2}$$

Schritt 3 :

Zur Erinnerung: Dies ist die letzte Formel der vorigen Seite:

$$\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\dfrac{g(x+\Delta x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h(x+\Delta x)}{\Delta x}\right]}{\left[h(x)\right]^2}$$

Als nächstes wollen wir den Grenzwert in die gegebenen Differentialquotienten g'(x) und h'(x) verwandeln. Dazu müssen wir den Bruch zunächst aufteilen, und dann den Grenzwert in zwei Grenzwerte zerlegen, die sich wiederum vereinfachen lassen.

Bruch auseinander schreiben:

$$\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\dfrac{g(x+\Delta x)\cdot h(x)}{\Delta x}-\dfrac{g(x)\cdot h(x+\Delta x)}{\Delta x}\right]}{\left[h(x)\right]^2}$$

Grenzwertsatz für den Grenzwert einer Differenz anwenden, d.h. von Minuend und Subtrahend den Grenzwert bilden und die Grenzwerte voneinander abziehen:

$$\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\dfrac{g(x+\Delta x)\cdot h(x)}{\Delta x}\right]-\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\dfrac{g(x)\cdot h(x+\Delta x)}{\Delta x}\right]}{\left[h(x)\right]^2}$$

Im ersten Grenzwert ist h(x) nicht von Δx abhängig. Daher kann es vor das Grenzwertzeichen gezogen werden. Das gleiche gilt im zweiten Grenzwert für g(x):

$$\frac{h(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\dfrac{g(x+\Delta x)}{\Delta x}\right]-g(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\dfrac{h(x+\Delta x)}{\Delta x}\right]}{\left[h(x)\right]^2}$$

Schritt 4 :

Zur Erinnerung: Dies ist die letzte Formel der vorigen Seite:

$$\frac{h(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)}{\Delta x}\right]-g(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\frac{h(x+\Delta x)}{\Delta x}\right]}{\left[h(x)\right]^2}$$

Auf dieser Seite wollen wir es durch einen Trick schaffen, dass die beiden Grenzwerte zu Differentialquotienten der gegebenen Funktionen werden. Dazu müssen wir zunächst –g(x) + g(x) dem Zähler des ersten Grenzwertes hinzufügen, und – h(x) + h(x) dem Zähler des zweiten Grenzwertes. Vereinfachen der Terme führt dann zum Erfolg.

Wir fügen –g(x)+g(x) bzw. –h(x)+h(x) dem Zähler des ersten bzw. zweiten Grenzwertes hinzu:

$$\frac{h(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)\mathbf{-g(x)+g(x)}}{\Delta x}\right)-g(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{h(x+\Delta x)\mathbf{-h(x)+h(x)}}{\Delta x}\right)}{\left[h(x)\right]^2}$$

Brüche auseinander schreiben:

$$\frac{h(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)\mathbf{-g(x)}}{\Delta x}+\frac{\mathbf{g(x)}}{\Delta x}\right)-g(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{h(x+\Delta x)\mathbf{-h(x)}}{\Delta x}+\frac{\mathbf{h(x)}}{\Delta x}\right)}{\left[h(x)\right]^2}$$

Grenzwertsatz für den Grenzwert einer Summe anwenden, d.h. von beiden Summanden einzeln den Grenzwert bilden und die Grenzwerte addieren:

$$\frac{h(x)\cdot\left[\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)\mathbf{-g(x)}}{\Delta x}\right)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\mathbf{g(x)}}{\Delta x}\right)\right]-g(x)\cdot\left[\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{h(x+\Delta x)\mathbf{-h(x)}}{\Delta x}\right)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\mathbf{h(x)}}{\Delta x}\right)\right]}{\left[h(x)\right]^2}$$

Der erste und dritte Grenzwert stellen nun Differentialquotienten dar, und können als g'(x) bzw. h'(x) geschrieben werden:

$$\frac{h(x)\cdot\left[g'(x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x)}{\Delta x}\right)\right]-g(x)\cdot\left[h'(x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{h(x)}{\Delta x}\right)\right]}{\left[h(x)\right]^2}$$

Schritt 5 :

Zur Erinnerung: Dies ist die letzte Formel der vorigen Seite:

$$\frac{h(x)\cdot\left[g'(x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x)}{\Delta x}\right)\right]-g(x)\cdot\left[h'(x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{h(x)}{\Delta x}\right)\right]}{\left[h(x)\right]^2}$$

Es sind noch zwei Grenzwerte übrig, die nicht durch die vier gegebenen Werte g(x), g'(x), h(x) und h'(x) ausgedrückt werden können. Glücklicherweise heben sich diese nach dem Ausmultiplizieren und einem Trick auf.

Wir multiplizieren beide eckigen Klammern aus:

$$\frac{h(x)\cdot g'(x)+h(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x)}{\Delta x}\right)-\left[g(x)\cdot h'(x)+g(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{h(x)}{\Delta x}\right)\right]}{\left[h(x)\right]^2}$$

Die eckigen Klammer auflösen (alle Vorzeichen umdrehen):

$$\frac{h(x)\cdot g'(x)+h(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x)}{\Delta x}\right)-g(x)\cdot h'(x)-g(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{h(x)}{\Delta x}\right)}{\left[h(x)\right]^2}$$

Jetzt den Trick anwenden: Wir schreiben die Faktoren vor den Grenzwerten, also h(x) bzw. g(x) in die Grenzwerte. Diese ist erlaubt, denn h(x) bzw. g(x) sind nicht von Δx abhängig:

$$\frac{h(x)\cdot g'(x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{h(x)\cdot g(x)}{\Delta x}\right)-g(x)\cdot h'(x)-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}\right)}{\left[h(x)\right]^2}$$

Dadurch sind die Grenzwerte vom Betrag her gleich, und weil sie unterschiedliche Vorzeichen haben, heben sie sich auf:

$$\frac{h(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot h'(x)}{\left[h(x)\right]^2}$$

Dies ist nun die Quotientenregel, und der Beweis ist vollbracht.