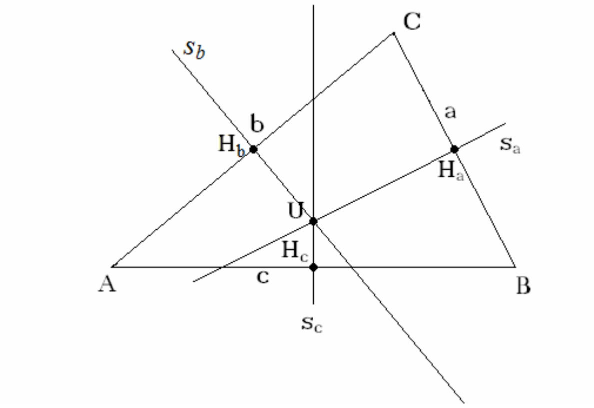
<u>Umkreismittelpunkt:</u>



Gegeben sind die Punkte A, B und C eines Dreiecks. Gesucht ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks.

Lösungsweg:

Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Streckensymmetralen der Dreieckspunkte. Eine Streckensymmetrale geht durch den Seitenmittelpunkt und ist auf diese Seite normal.

Bestimmung der Streckensymmetrale s_a:

1. $H_{BC} = \frac{1}{2}(B+C)$
2. $\overrightarrow{BC} = C - B$
3. Der Vektor $\overrightarrow{BC}$ ist normal auf die Streckensymmetrale s_a, $\overrightarrow{BC}$ ist also der Normalvektor dieser Geraden. Man erhält:
$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot H_{BC}$

Bestimmung der Streckensymmetrale s_b:

4. $H_{AC} = \frac{1}{2}(A+C)$
5. $\overrightarrow{AC} = C - A$
6. Der Vektor $\overrightarrow{AC}$ ist normal auf die Streckensymmetrale s_b, $\overrightarrow{AC}$ ist also der Normalvektor dieser Geraden. Man erhält:
$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot H_{AC}$

Berechnung des Umkreismittelpunktes: Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Streckensymmetralen s_a und s_b.

7. Bestimmung des Schnittpunktes von s_a und s_b

Gerechnetes Beispiel:

Die Punkte $A(1|-2)$, $B(4|-4)$ und $C(6|-1)$ bilden ein Dreieck. Bestimme den Umkreismittelpunkt des Dreiecks.

Lösung:

Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Streckensymmetralen der Dreieckspunkte. Eine Streckensymmetrale geht durch den Seitenmittelpunkt und ist auf diese Seite normal.

Bestimmung der Streckensymmetrale s_a:

$$H_{BC} = \frac{1}{2}(B+C) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2{,}5\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{BC}=C-B=\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{BC}$ ist normal auf die Streckensymmetrale s_a, $\overrightarrow{BC}$ ist also der Normalvektor dieser Geraden. Man erhält:

$\vec{n}\,.\,\vec{x}=\vec{n}\,.H_{BC}$

$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5\\-2{,}5\end{pmatrix} \Rightarrow 2.x+3.y=2.5+3.(-2{,}5)$

Man erhält: $2x+3y=2{,}5$

Bestimmung der Streckensymmetrale s_b:

$H_{AC}=\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}=C-A=\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{AC}$ ist normal auf die Streckensymmetrale s_b, $\overrightarrow{AC}$ ist also der Normalvektor dieser Geraden. Man erhält:

$\vec{n}\,.\,\vec{x}=\vec{n}\,.H_{AC}$

$\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix} \Rightarrow 5.x+1.y=5.3{,}5+1.(-1{,}5) \Rightarrow 5x+y=16$

Schnittpunkt der beiden Geraden:

$2x$	$+3y$	=	2,5	
$5x$	$+y$	=	16	$\vert.(-3)$
$2x$	$+3y$	=	2,5	}+
$-15x$	$-3y$	=	-48	
$-13x$		=	-45,5	$\vert:(-13)$
x		=	3,5	

Setzt man x=3,5 in $2x+3y=2{,}5$ ein, so erhält man:

2.3,5	$+3y$	=	2,5	
7	$+3y$	=	2,5	$\vert-7$
	$3y$	=	-4,5	$\vert:3$
	y	=	-1,5	

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der Umkreismittelpunkt $U=(3{,}5|-1{,}5)$.