1. FORMALE POTENZREIHEN UND „OPS“-ERZEUGENDE FUNKTIONEN ([1], S.30-39)

In diesem Vortrag geht es um *formale Potenzreihen*. Das Konzept der Potenzreihe ist sicherlich aus der Vorlesung Analysis I bekannt, allerdings ging es dort eher darum, Funktionen durch Potenzreihen darzustellen. Wir nehmen hier einen etwas anderen Standpunkt ein und verzichten vor allem auf Fragen nach Konvergenz der Reihen, sondern betrachten sie nur *formal*.

Beginnen Sie Ihren Vortrag damit, den Begriff der Potenzreihe zu definieren. Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen, dann definieren wir die zu dieser Folge gehörende Potenzreihe als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^k + \ldots.$$

Man nennt $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ die *Koeffizientenfolge* von f, die Menge aller formalen Potenzreihen in x mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{C}[[x]]$. Beachten Sie, dass in der formalen Theorie der Potenzreihen x NICHT für eine komplexe Zahl steht, sondern lediglich eine völlig abstrakte Unbestimmte ist. Insbesondere definiert eine formale Potenzreihe keine Funktion im üblichen Sinne. Trotzdem gibt es einige wichtige Potenzreihen, die eigene Namen verdienen, z.B.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Beachten Sie, dass die z. B. erste dieser Definitionen der geometrischen Reihe entspricht, die als Funktion nur für $|x| < 1$ definiert ist, aber als formale Potenzreihe immer einen sinnvollen Ausdruck liefert.

Seien nun $f(x)$ und $g(x)$ zwei Potenzreihen mit Koeffizientenfolgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Dann erklären wir die *Summe* der beiden Potenzreihen durch

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n,$$

also einfach komponentenweise. Das *Produkt* zweier Potenzreihen ist wie folgt erklärt,

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n,$$

wie Sie es aus der Analysis I bereits kennen.

Als nächstes widmen wir uns der Frage, wann der *Kehrwert* einer Potenzreihe $f(x)$ wie oben existiert, also ob es eine Potenzreihe $g(x)$ mit $f(x) \cdot g(x) = 1$ gibt. Man schreibt für dieses $g(x)$ dann auch $\left(\frac{1}{f}\right)(x)$. Zeigen Sie die folgende Proposition (siehe S. 31 in [1]).

Proposition 1.1. *Der Kehrwert der Potenzreihe* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *existiert genau dann, wenn* $a_0 \neq 0$ *gilt und ist in diesem Falle eindeutig bestimmt.*

Neben den Grundrechenarten gibt es noch weitere wichtige Werkzeuge, um formale Potenzreihen zu manipulieren. Dazu gehört die *formale Ableitung* von Potenzreihen, die wie folgt definiert ist,

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Wir haben uns nun mit einigen Manipulationstechniken für Potenzreihen vertraut gemacht, allerdings interessieren wir uns meist eher für ihre Koeffizientenfolgen. Dafür brauchen wir eine Art Wörterbuch, welche Manipulationen der Koeffizientenfolge sich wie auf die Seite der Potenzreihen übertragen.

Definition 1.2. Wir schreiben $f(x) \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ um auszudrücken, dass $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ die Koeffizientenfolge der Potenzreihe $f(x)$ ist.

Geben Sie die folgenden Regeln inklusive Herleitung an. Diese werden wir im weiteren Verlauf des Proseminars immer wieder verwenden.

Regel 1. Für $f(x) \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $h \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{1}{x^h}\left(f(x) - \sum_{n=0}^{h-1} a_n x^n\right) \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{a_{n+h}\}_{n=0}^{\infty}.$$

Regel 2. Sei $f(x) \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und P ein Polynom, dann gilt

$$P(xD)f \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{P(n)a_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Regel 3. Sei $f(x) \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $g(x) \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, dann gilt

$$f(x) \cdot g(x) \overset{ops}{\longleftrightarrow} \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Regel 4. Sei $f(x) \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $k \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$f(x)^k \overset{ops}{\longleftrightarrow} \left\{\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k}\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Regel 5. Sei $f(x) \overset{ops}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, dann ist

$$\frac{f(x)}{(1-x)} \overset{ops}{\longleftrightarrow} \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Zum Abschluss Ihres Vortrages sollten Sie einige Beispiele für das Vorgestellte angeben, wie Sie in [1] beschrieben sind (besonders zu empfehlen sind Beispiel 1 auf S. 35 und Beispiel 5 auf Seite 38).

Literatur

[1] H. Wilf, *generatingfunctionology*, Internet Edition, Academic Press, Inc, 1994.