Prof. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2014/2015

Analysis 3
Übungsblatt 13

Die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen bis zum 21. Januar um 16 Uhr im Übungsbriefkasten im Studierendenarbeitsraum abgegeben werden.

Aufgabe 1: Wir betrachten jeweils den Vektorraum V_i mit dem Skalarprodukt g_i für $i = 1, 2$.

$$V_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; f(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}\} \text{ und } g_1(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$
$$V_2 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}\} \text{ und } g_2(A, B) = \operatorname{tr}(A \cdot B) \text{ ist die Spur von } A \cdot B.$$

(a) Geben Sie jeweils eine Basis von V_1 und V_2 an.

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei g_1 und g_2 um nicht-ausgeartete Skalarprodukte handelt.

(c) Geben Sie die Dualräume V_1^* und V_2^* an.

Aufgabe 2: Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $g(v, w) = v \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} w$ ein nicht-ausgeartetes Skalarprodukt ist.

(b) Berechnen Sie $g(e_i, e_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

(c) Finden Sie eine Basis $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ mit gleicher Orientierung, so dass

$$g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} .$$

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei $\{e_1, \dots, e_k\}$ eine Basis für V und sei $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ die duale Basis für V^*. Sei $\omega \in \Lambda^m(V^*)$ mit $1 \leq m < k$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \wedge (e_i \lrcorner \, \omega) = c\omega$$

Aufgabe 4: Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $g(v,w) = v \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} w$ ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt ist.

(b) Haben die Basen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

die gleiche Orientierung?

(c) Wir definieren $\omega \in \Lambda^1(V^*)$ durch $\omega(v) = 2v_2$. Bestimmen Sie $*\omega$ zu g.

Aufgabe 5 (10 Punkte): Wir betrachten $V = \mathbb{R}^5$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Die Funktion $\omega \in \Lambda^2(V^*)$ sei definiert durch

$$\omega(v,w) = v_2w_5 - v_5w_2 + 2v_3w_1 - 2v_1w_3.$$

Geben Sie $*\omega$ an.

Aufgabe 6 (5 Punkte): Wir betrachten das Rechteck $Q = [0,1]^2$. Sei $\vec{n}$ der äußere Normaleneinheitsvektor auf ∂Q. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $\vec{v} \in C^2([0,1]^2; \mathbb{R}^2)$ gilt, dass

$$\int_Q \nabla \cdot \vec{v} d(x_1,x_2) = \int_{\partial Q} \vec{n} \cdot \vec{v} d\tau.$$

Aufgabe 7: Sei $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 x_2 x_3^3 + x_2^2 x_3 + x_1$.

(a) Berechnen Sie $df(v)$ mit $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(b) Sei $\omega = f dx_1 \wedge dx_2$. Berechnen Sie $d\omega(u,v,w)$ mit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**