Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2010/2011

Analysis III
Übungsblatt 10

Diese Hausaufgaben werden am 23.12.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1.

1. Wir betrachten $F(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right)$. Ist $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ein Diffeomorphismus?
2. Wir betrachten $\Phi(x,y,z) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, xyz\right)$. Ist $\Phi : (\mathbb{R}^+)^3 \to (\mathbb{R}^+)^3$ ein Diffeomorphismus?

Aufgabe 2. Oben auf dem Weihnachtsbaum ist eine Spitze angebracht. Der kugelförmige Teil wird beschrieben durch

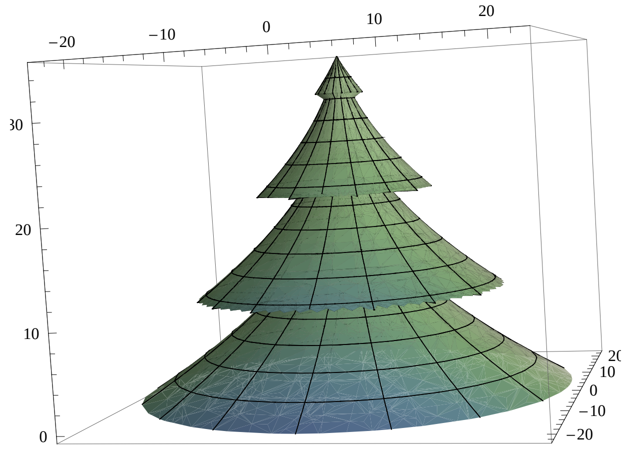
$$\frac{1}{9} \leq x^2 + y^2 = -\frac{11}{16} - z^2 - 3z,$$

der obere Teil durch

$$0 \leq z = 8 - 8\sqrt[6]{x^2 + y^2}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des kugelförmigen Teils.

Die Weihnachtsbaumspitze.



Die Menge T aus Aufgabe 3.

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Berechnen Sie $\lambda(T)$ für

$$T = \left\{(x,y,z)\,;10\sqrt{x^2+y^2} \leq (35-z)\left(5 + \arctan\left(\tan\left(\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{10}\right)\right)\right)\right) \text{ und } z \geq 0\right\}.$$

(bitte wenden)

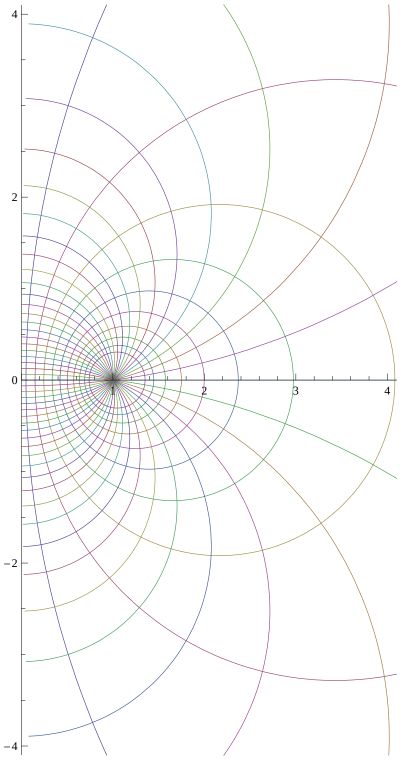
Aufgabe 4. Toruskoordinaten
In Anwendungen aus der Elektrotechnik, zum Beispiel bei der Beschreibung eines Magnetfeldes um eine kreisförmige Spule, werden manchmal Toruskoordinaten verwendet:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sinh(r)\cos(\beta)}{\cosh(r)-\cos(\alpha)}, \\ y &= \frac{\sinh(r)\sin(\beta)}{\cosh(r)-\cos(\alpha)}, \\ z &= \frac{\sin(\alpha)}{\cosh(r)-\cos(\alpha)}. \end{aligned}$$

1. Machen Sie überzeugend klar, warum man mit $(r,\alpha,\beta) \in [0,\infty) \times (-\pi,\pi] \times (-\pi,\pi]$ fast jeden Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ erreichen kann.

2. Zeigen Sie, dass man mit der Abbildung $\Phi : (r,\alpha,\beta) \mapsto (x,y,z)$ in fast jedem Punkt $(r_0,\alpha_0,\beta_0) \in \mathbb{R}^3$ lokal einen Diffeomorphismus bilden kann. In welcher Nullmenge läßt sich lokal kein solcher Diffeomorphismus bilden?

3. Berechnen Sie $\det \Phi'$ und $\det \left(\Phi^{inv}\right)'$, wo diese definiert sind.



Toruskoordinaten für $\beta = 0$

Aufgabe 5. Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche von $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 = z^2 \leq 1\right\}$ und skizzieren Sie die Menge.