0. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie
Wiederholung aus Analysis 1-2
Besprechung: 19–23.04.2017 in den Übungen

1. Aufgabe
(a) Bestimmen Sie $x, y \in \mathbb{R}$, so dass
$$\frac{2+i7}{3-i4} = x + iy$$
gilt. Sind x und y eindeutig?
(b) Zeigen Sie $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

2. Aufgabe
(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ mit komponentenweiser Addition und der Multiplikation
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$
ein Körper ist.
(b) Folgern Sie, $\mathbb{C}$ ist ein Körper.

3. Aufgabe
Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ kein geordneter Körper seien kann. D. h. es gibt keine Ordnungsrelation $\prec$ auf $\mathbb{C}$, welche folgende Eigenschaften erfüllt.

i) Für je zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt entweder $z \prec w$ oder $w \prec z$ oder $z = w$.

ii) Für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt: $z_1 \prec z_2 \Rightarrow z_1 + z_3 \prec z_2 + z_3$.

iii) Für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ mit $0 \prec z_3$ gilt: $z_1 \prec z_2 \Rightarrow z_1z_3 \prec z_2z_3$.

4. Aufgabe
Zeigen Sie (ohne Verwendung von Polarkoordinaten), dass $|zw| = |z||w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt.

5. Aufgabe
Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ bijektiv und stetig.
Zeige: Ist X kompakt, so ist f ein Homöomorphismus.

6. Aufgabe
Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) X ist zusammenhängend.

(ii) Jede lokal-konstante Funktion auf X ist konstant.

(iii) Jede stetige Funktion von X nach $\{0, 1\}$ ist konstant.