**2. Blatt zur Analysis 2** Keine Abgabe

**1. Aufgabe**
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.

(a) Zeige, daß $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ durch die Taylorreihe in $x_0$ dargestellt wird, d.h. bezeichnet $T_{x_0,n}$ das $n$-te Taylorpolynom der $\cos$-Funktion in $x_0$, so gilt $T_{x_0,n}(x) \to \cos(x)$ für $n \to \infty$ und jedes $x \in \mathbb{R}$.

Tipp: Lagrange-Restglied

(b) Berechne $T_{\frac{\pi}{4},2}$ und zeige, daß dieses Polynom auf $\left[\frac{\pi}{4}-0.1\,,\,\frac{\pi}{4}+0.1\right]$ von $\cos$ um weniger als einen Fehler von $2 \cdot 10^{-4}$ abweicht.

**2. Aufgabe**

(a) Berechne explizit die dritten Taylorpolynome in 0 zu den Funktionen $\sqrt{1+x}^{\,3}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ und $\sqrt[5]{1+x}$.

(b) Gebe Näherungen für $\log(0.9)$ und $\sin(91^\circ)$ mit Fehlerabschätzung an, und zwar jeweils mit Hilfe eines geeigneten zweiten Taylorpolynoms und des Lagrange-Restgliedes.

**3. Aufgabe**

(a) Zeige, daß $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ konvergiert für $\alpha > 1$.

(b) Zeige, daß $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ konvergiert für $1 < \alpha < 2$.

(c) Beweise die Konvergenz der sogenannten Fresnel–Integrale,

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos(x^2)dx.$$

**4. Aufgabe**
Zeige, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\log n)^s}$ konvergent für $s > 1$ und divergent für $s \leqslant 1$ ist.