Die

Monte-Carlo-Simulation

Ein Vortrag von Laureen Schareina
Mathematisches Institut
Universität zu Köln
26.06.2015

Inhaltsangabe

Allgemeines

- Namen: Monte-Carlo-Simulation,-Studie, MC-Simulation
- Verfahren aus der Stochastik, um ...

  - analytisch nicht oder nur aufwendig lösbare Probleme numerisch zu lösen

  - komplexe Prozesse, die nicht geradlinig analysiert werden können, nachzubilden *(z.B Wetter und Klima der Erde)*

  - Unsicherheiten und statistisches Verhalten zu simulieren *(z.B.: Risikomanagement)*

Allgemeines

Grundlage: „Gesetz der großen Zahlen“

→ relative Häufigkeit eines Zufallsexperiments stabilisiert sich um die theoretische Wahrscheinlichkeit eines Zufallsergebnisses (Grundlage: Experiment wird immer unter denselben Voraussetzungen durchgeführt)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \xrightarrow{n\to\infty} E(X)$$

Geschichte

- Erste Ideen in 1930er von Enrico Fermi zur praktischen Simulation einer Neutronenstreuung
- Damals noch namenloses stochastisches Verfahren, welches das schon damals bekannte „Gesetz der großen Zahlen“ zu nutzen machte
- 1946 entdeckte Stanislaw Ulam die Methode wieder. Er arbeitete gemeinsam mit John von Neumann an dem geheimen „Manhattan Project“. Ulam verriet von seiner Methode kombinatorische Probleme einfacher lösen zu können
- Namensgebung: „Monte-Carlo-Simulation“ ist eine Anlehnung an die Spielbank in Monaco, bei der Ulam's Onkel sich oft Geld zum Spielen lieh

Funktionsweise

- Wahl einer großen natürlichen Zahl n (idR mindestens 10.000)
- Erzeuge n unabhängige Zufallszahlen (mit geeigneter Wahrscheinlichkeitsverteilung) x_i
- Schätze Erwartungswert E(X) durch $\overline{x}_N := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- MCS (Software) arbeitet mit Zufallsgeneratoren
- Es werden sehr viele Szenarien unter Zuhilfenahme von Zufalls-zahlen generiert
- Ergebnisse werden zusammengefasst und dienen der Bewertung von Planungsfragen

Eigenschaften der MCS

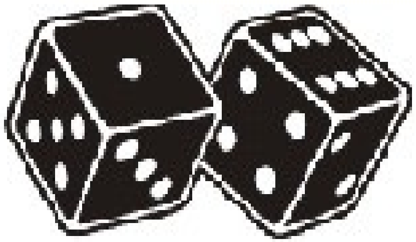
Ist Var(X) < ∞, so folgt aus dem zentralen Grenzwertsatz

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - EX\right)\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Var(X)}} \xrightarrow{n\to\infty} Y \qquad Y \sim N(0,1).$$

→ MCS konvergiert also punktweise gegen die Standardnormalverteilung N(0,1)
→ Für genügend großes n nähert sie sich der Normalverteilung $N(\mu,\sigma^2)$ an

Approximatives 95%-Konfidenzintervall:

$$\boxed{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 1.96\cdot\sqrt{\frac{Var(X)}{n}}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + 1.96\cdot\sqrt{\frac{Var(X)}{n}}\right].}$$



(beachte: $\Phi(1.96) = 0.975, \quad \Phi^{-1}(0.025) = -1.96$)

Eigenschaften der MCS

Da σ² unbekannt ist, wird es geschätzt und ersetzt im approx. Konfidenzinterval:

$$Var(X) \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \bar{X}^2\right)$$

<u>Konvergenzrate der MC-Methode</u> = Länge des Konfidenzintervalls

$$O\left(\sigma(X)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

d.h. jede weitere Stelle Genauigkeit erfordert das 100-fache an Zufallszahlen !!!
=> **Sehr langsame Konvergenz**

Monte-Carlo-Schätzer

Für den Schätzer gilt:

→ erwartungstreu

→ stark konsistent wegen $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \xrightarrow{n\to\infty} E(X)$

→ effizient

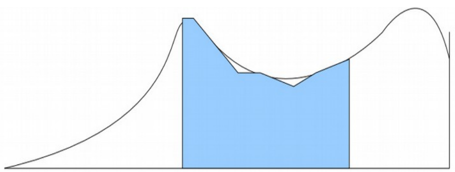
→ suffizient

→ zufällig

→ gemeinsam mit Konfidenzintervall anzugeben

Anwendungsgebiete

Die Monte-Carlo-Methode ist in allen naturwissenschaftlichen Bereichen gebräuchlich:



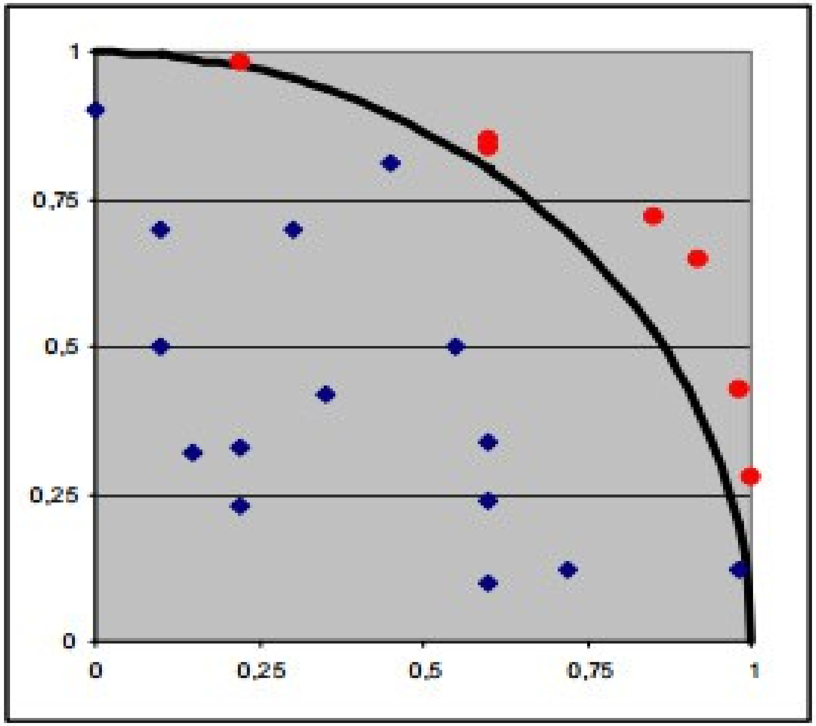
- Mathematik *(Bsp: Berechnung eines Integrals)*
- Physik *(Bsp: quantenfeldtheoretische Modelle, kinetische MCS)*
- Nuklearmedizin
- Produktionsprozesse in einem Fertigungsunternehmen, um Engpässe und Opportunitäten in der Produktion aufzudecken
- Wetter und Klima der Erde

…

1. Anwendungsbeispiel

(MCS zur Approximation der Zahl Pi)

- Verwende Identität: $\frac{\text{Fläche des Viertelkreises}}{\text{Fläche Einheitsquadrat}} = \frac{\pi/4}{1}$
- Erzeuge N Zufallspaare (x,y) im Einheitsquadrat
- Zähle nur die Anzahl M der Paare im Einheitskreis

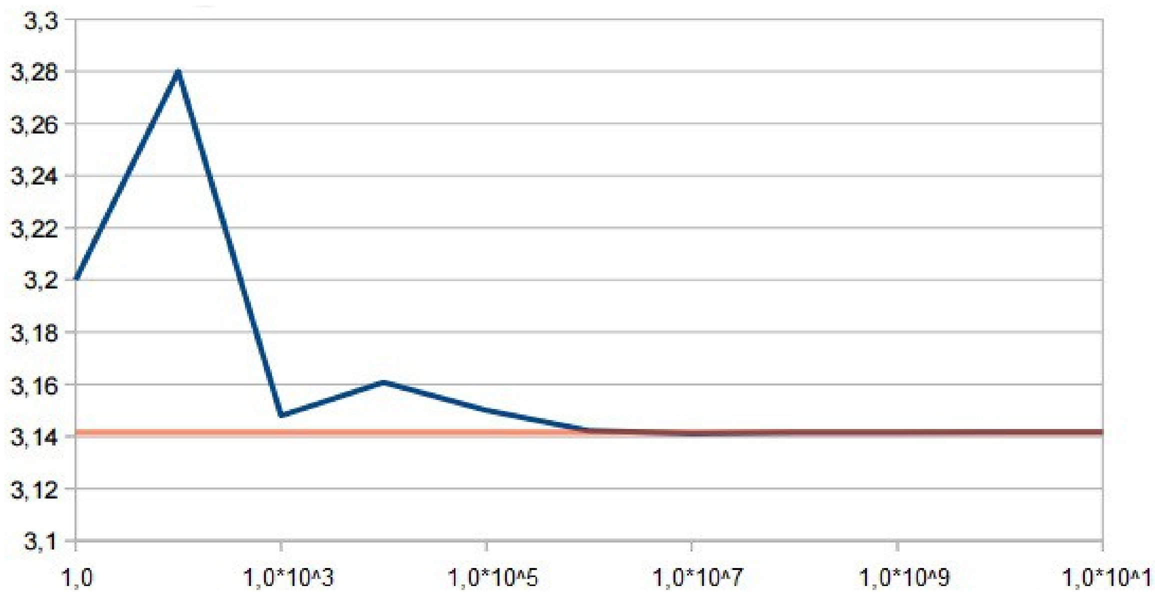


1. Anwendungsbeispiel

(MCS zur Approximation der Zahl Pi)

→ nach etwa 100 Milliarden Wiederholungen nähert sich der Wert der Zahl Pi auf 4 Nachkommastellen an

approx. Wert:	3,14158731...
reelle Zahl Pi:	3,1415926536....



→ Monte-Carlo-Schätzer für Pi: $\hat{\pi}_N := 4\frac{M}{N}$

Exkurs: Symbole und Formeln

Black-Scholes-Formel $\mathrm{d}S_t = \mu\, S_t\, \mathrm{d}t + \sigma\, S_t\, \mathrm{d}W_t$

europäischer Call $B=(P(T)-K)^{+}$

μ=erwartete Rendite des Aktienkurses
σ=Volatilität ($\sigma>0$)
τ=Zeit ($t\geq0$)
W_t =Standard-Wiener-Prozess

S = aktueller Aktienkurs

K = Ausübungspreis

P = Put-Option

T = Gesamtlaufzeit

Put: *„Inhaber einer Put-Option hat das Recht, aber nicht die Pflicht, zu einem bestimmten Zeitpunkt eine festgelegte Menge eines bestimmten Basiswertes zu einem im Voraus festgelegten Ausübungspreis zu verkaufen."*

2. Anwendungsbeispiel

(MC-Bewertung einfacher Optionen)

Betrachte eine einfache Option mit Endzahlung B (im Black-Scholes-Markt) mit

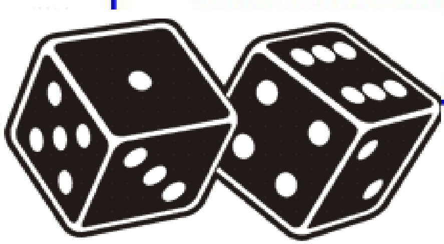
$$B = f\left(P(T)\right)$$

$$P(T) = p \cdot exp\left(\left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W(T)\right), \quad W(T) \sim N(0,T).$$

=> Optionspreis $E\left(exp(-rT)B\right)$

MC-Algorithmus:

1. Erzeuge n unabhängige Zufallszahlen $Z_i \sim N(0,1)$, i=1,..,n.
2. Erhalte n unabh. Aktienpreise $P_i(T) = p \cdot exp\left(\left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z_i\right)$, i=1,..,n.
3. Erhalte die zugehörigen Endzahlungen der Option $B_i = f\left(P_i(T)\right)$
4. Schätze den Optionspreis über $E_Q\left(e^{-rT}B\right) \approx e^{-rT} \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B_i\right)$.



r = risikofreier Zins   p = aktueller Zinssatz

2. Anwendungsbeispiel

(MC-Bewertung einfacher Optionen)

- Die Black-Scholes-Formel liefert den exakten Preis als

$$V(0) = P(0) \cdot \Phi\left(d_1(0)\right) - K \cdot e^{-rT} \Phi\left(d_2(0)\right)$$

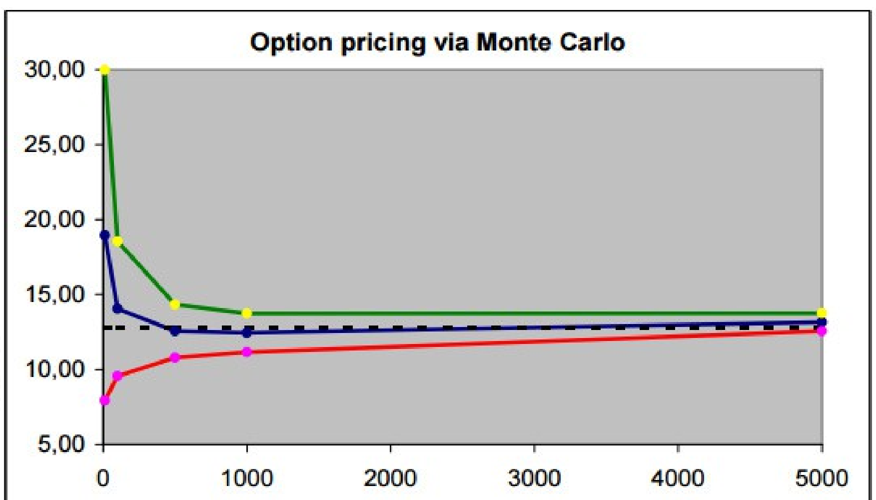
$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\frac{-z^2}{2} dz$$

V = Wert einer Option

- MC-Bewertung mit Parametern r=0,03, σ=0,3, T=1, P(0)=100, K=103 ergibt sich folgendes Verhalten (exakter Preis 12.84):



→ Nach etwa 5000 Wdh nähert sich der Wert dem exakten Preis

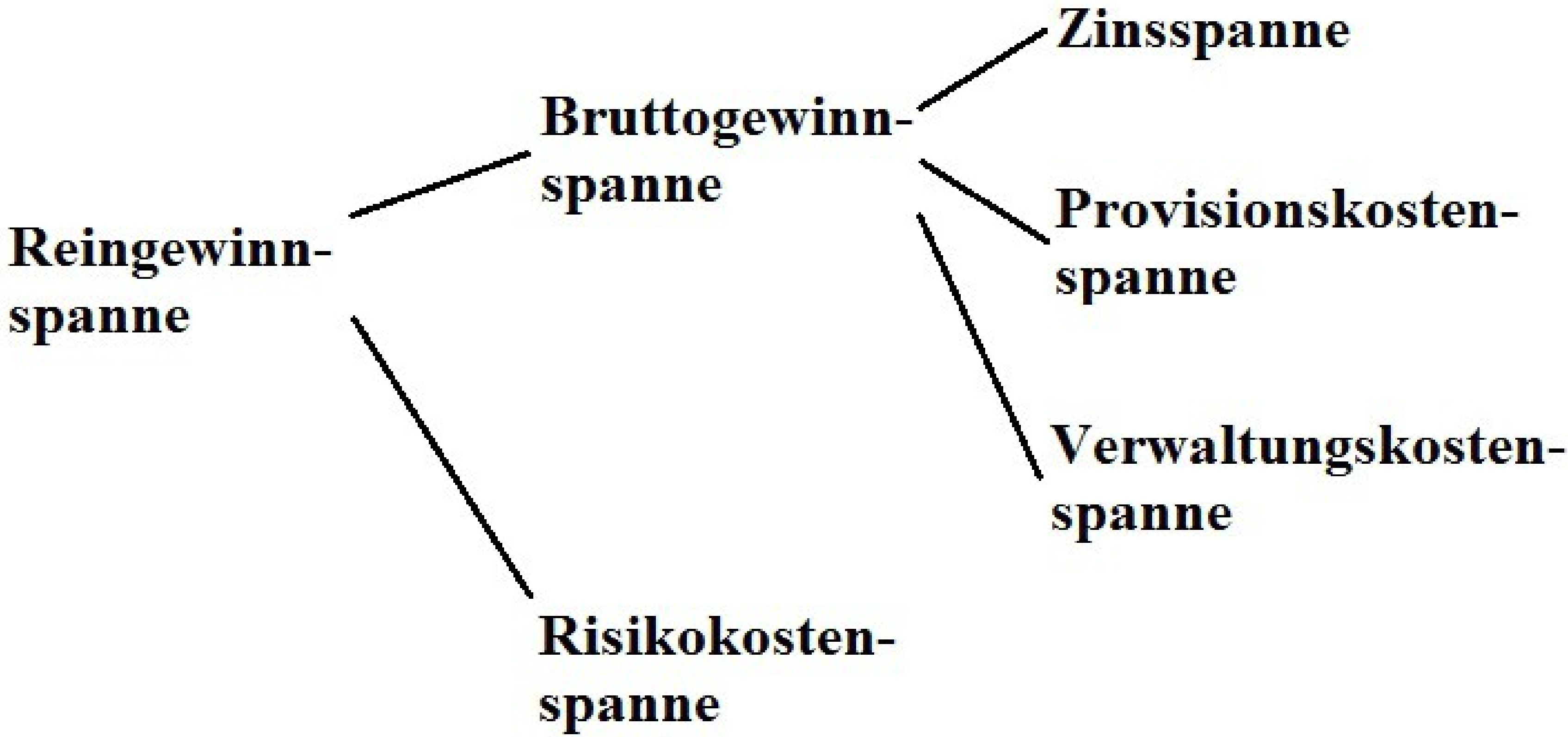
→ guter Schätzer

3. Anwendungsbeispiel

(Risikomanagement)

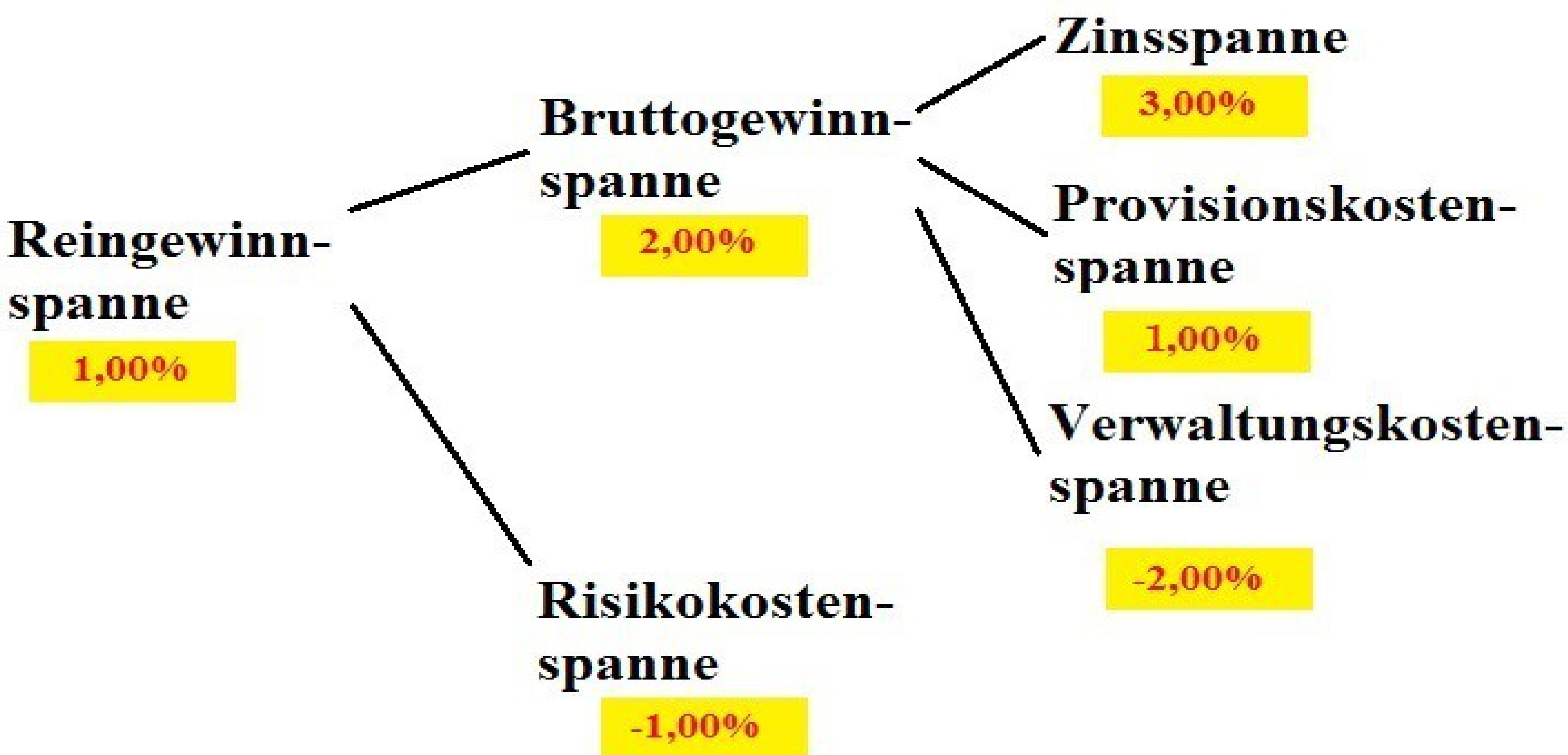
Grundstruktur der BSC:

Vereinfachtes ROI-Schema



Ziel: Reingewinnspanne von 1%

Prognose



→ Reingeweinnspanne beträgt 1%, aber unsichere Aussage, da Werte nur geschätzt sind

Unsicherheitsverarbeitung

(What-If-Szenarien)

1. Szenario: Der schlechteste Fall

alle negativen Ausprägungen treten ein:

- Sinkendes Marktzinsniveau
- Verengung der Marge
- Schlechtes Fristentransformationsergebnis

→ wirken sich negativ auf die Zins-, Provisionskosten- und Verwaltungskostenspanne aus

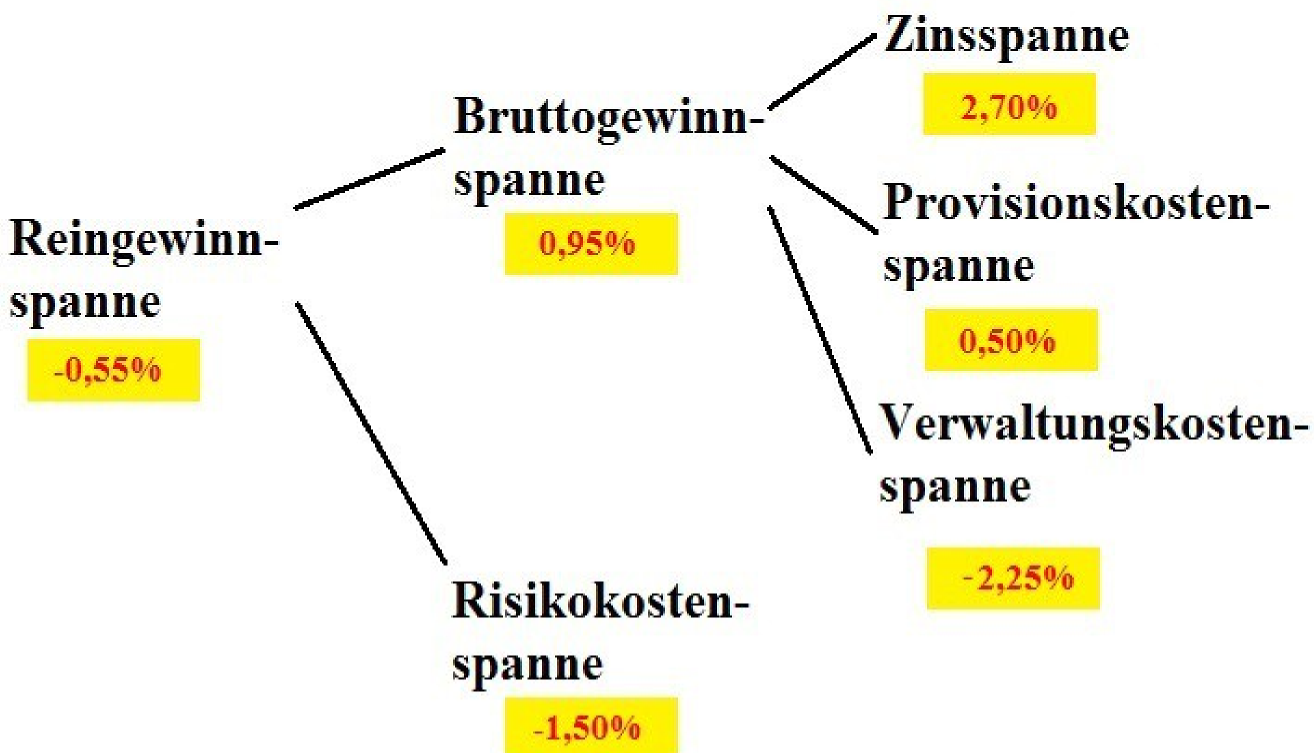
Unsicherheitsverarbeitung

(What-If-Szenarien)

- Sehr hohe Insolvenzquoten
- Ratingstrukturverschlechterung
- Sicherheiten verlieren an Wert

→ *wirken sich negativ auf die Risikokostenspanne aus*

ROI-Schema: Worst Case



Unsicherheitsverarbeitung

(What-If-Szenarien)

- <u>2. Szenario: Der beste Fall</u>

  alle positiven Ausprägungen treten ein:

- Steigendes Marktzinsniveau
- Normalisierung der Zinsstrukturkurve
- Ausweitung der Marge
- Positives Fristentransformationsergebnis

→ positive Auswirkung auf die Zins-, Provisionskosten- und Verwaltungskostenspanne

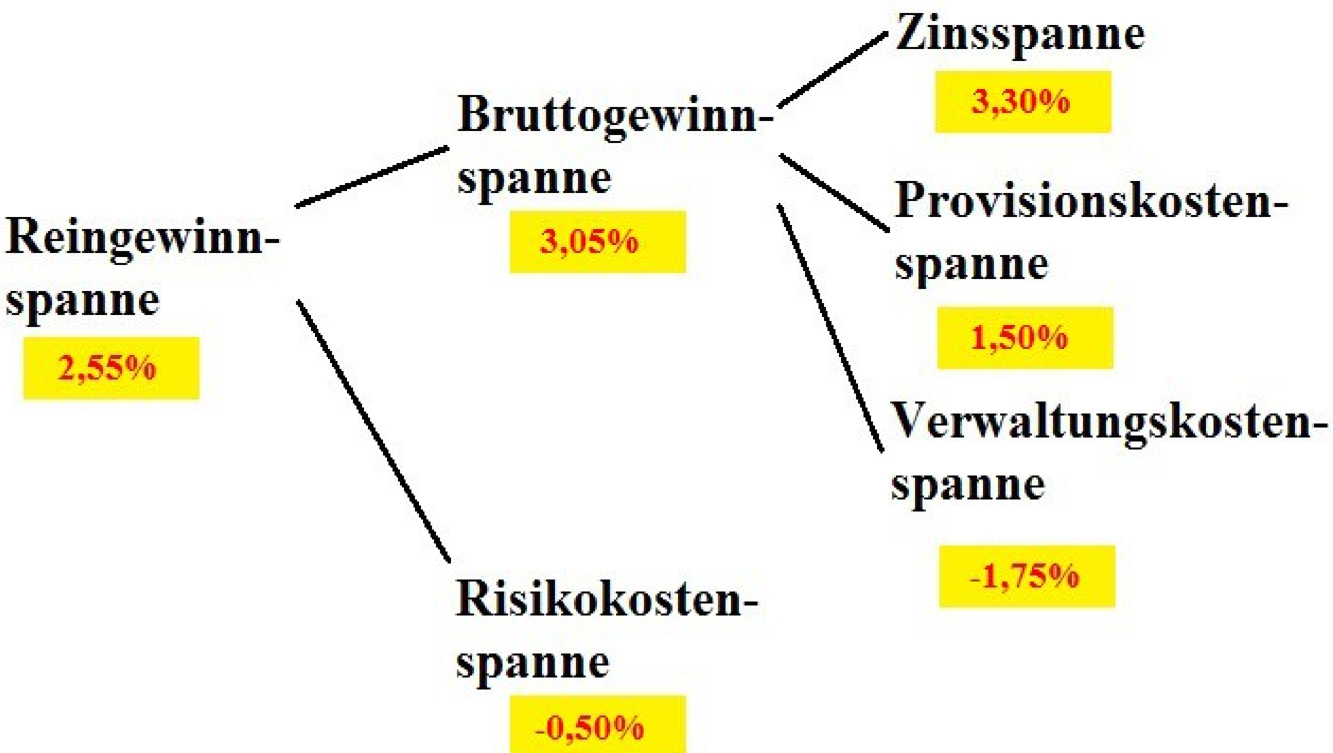
Unsicherheitsverarbeitung

(What-If-Szenarien)

- Sinkende Insolvenzquoten
- Verbesserung der Ratingstruktur

→ *positive Auswirkung auf die Risikokostenspanne*

ROI-Schema: Best Case



Unsicherheitsverarbeitung

(What-If-Szenarien)

Variablen	*Worst Case*	*Prognose*	*Best Case*
Zinsspanne	**2,70%**	**3,00%**	**3,30%**
Provisionsspanne	**0,50%**	**1,00%**	**1,50%**
Verwaltungskostenspanne	**-2,25%**	**-2,00%**	**-1,75%**
Risikokostenspanne	**-1,50%**	**-1,00%**	**-0,50%**
Reingewinnspanne	**-0,55%**	**1,00%**	**2,55%**

Unsicherheitsverarbeitung: Auswertung

(What-If-Szenarien)

- Bandbreite der Reingewinnspanne nun bekannt (-0,55 bis 2,55)

  → unrealistisch, da Zusammentreffen aller negativen bzw. positiven Ausprägungen sehr, sehr unwahrscheinlich ist

- Problem: Welche Szenarien bekommen welches Gewicht? Input-Faktoren sind in ihren Ausprägungen nicht gleichgewichtig

  → Gefahr der Wahl eines „genehmen“ Zukunftspfades

Weg zur Monte-Carlo-Methode

What-If-Szenarien:

- Wir betrachten vier Komponenten mit drei möglichen Werten (schlechtester, bester und „wahrscheinlichster" Fall (Prognose))

→ 3*3*3*3 = 81 zu betrachtene Kombinationen

Weg zur Monte-Carlo-Methode

Monte-Carlo:

- Jede der vier Variablen kann nicht nur drei verschiedene Werte annehmen
- Prinzipiell kann z.B. die Zinsspanne jeden beliebigen Wert zwischen 2,7% und 3,3% annehmen

→ Erweiterung des Szenarios, indem man bspw. für jede Variable 7 verschiedene Werte zulässt

→ 7*7*7*7 = 2401 unterschiedliche Szenarien

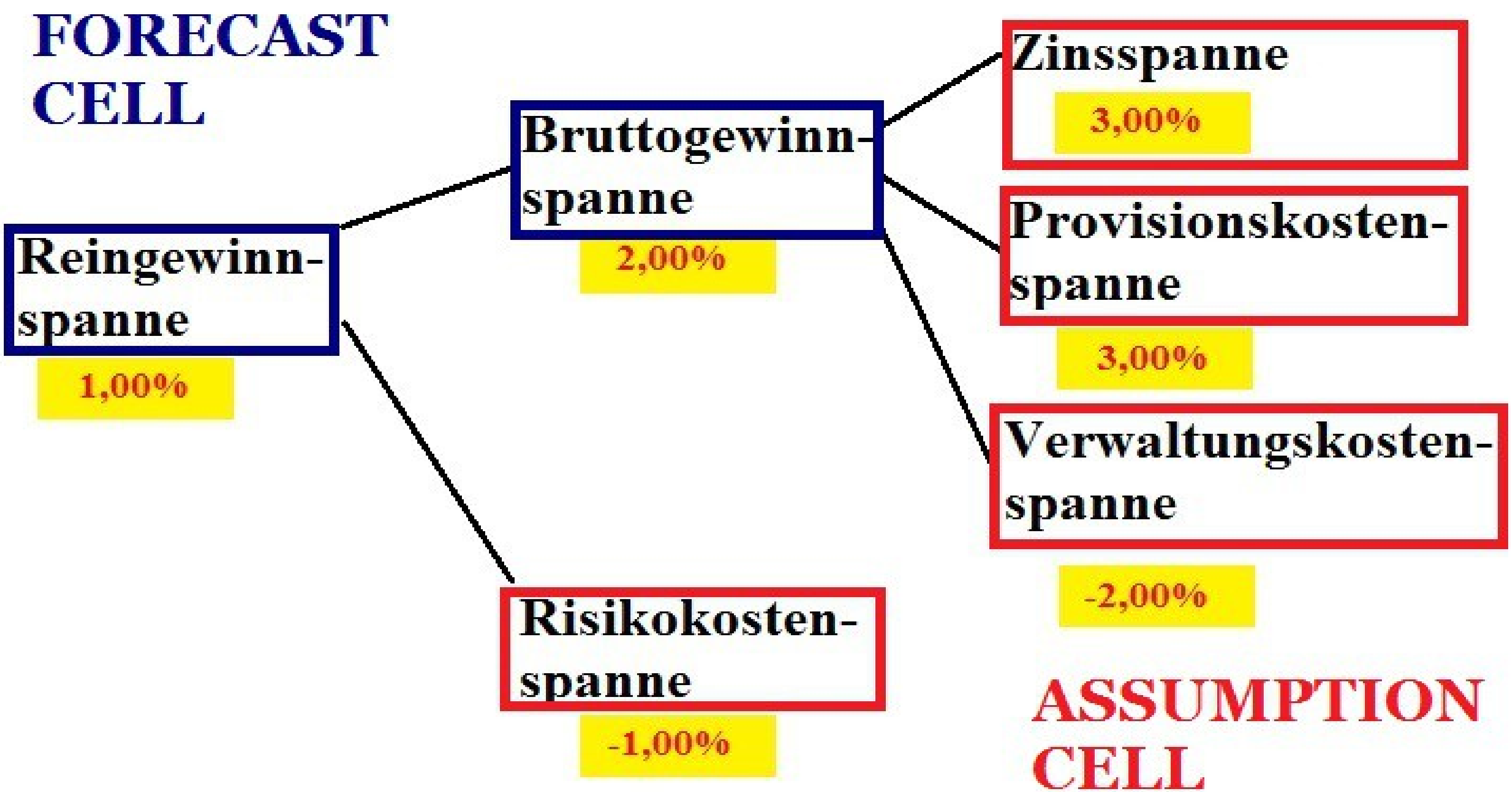
(d.h. etwa 30 mal mehr)

Exkurs:
Software Crystal Ball 2000

(Add-In für Excel)

- Man weist Variablen über das Menü Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen zu
- Behandelte Zellen werden „assumption cells“ bezeichnet
- Zellen, deren Ergebnis statistisch analysiert werden sollen, kennzeichnet man als „forecast cells“

ROI-Schema

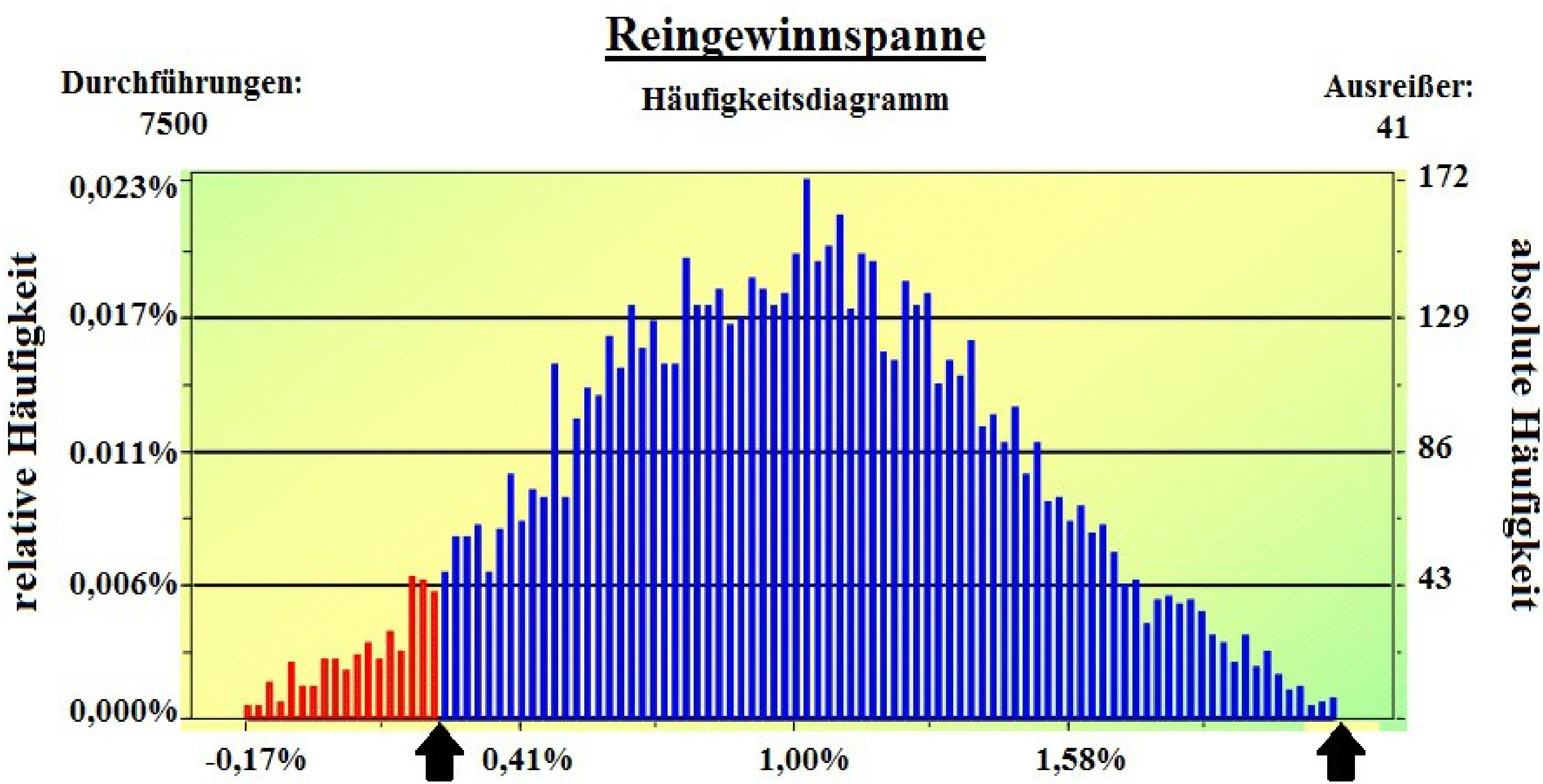


FORECAST CELL
Reingewinn-spanne
1,00%
Bruttogewinn-spanne
2,00%
Zinsspanne
3,00%
Provisionskosten-spanne
3,00%
Verwaltungskosten-spanne
-2,00%
Risikokosten-spanne
-1,00%
ASSUMPTION CELL

Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung

(1. Gleichverteilung)

Variablen	*Verteilung*	*Worst Case*	*Prognose*	*Best Case*
Zinsspanne	**Gleichverteilung**	**2,70%**	**3,00%**	**3,30%**
Provisionsspanne	**Gleichverteilung**	**0,50%**	**1,00%**	**1,50%**
Verwaltungskostenspanne	**Gleichverteilung**	**-2,25%**	**-2,00%**	**-1,75%**
Risikokostenspanne	**Gleichverteilung**	**-1,50%**	**-1,00%**	**-0,50%**
Reingewinnspanne	**Gleichverteilung**	**-0,55%**	**1,00%**	**2,55%**



Auswertung:

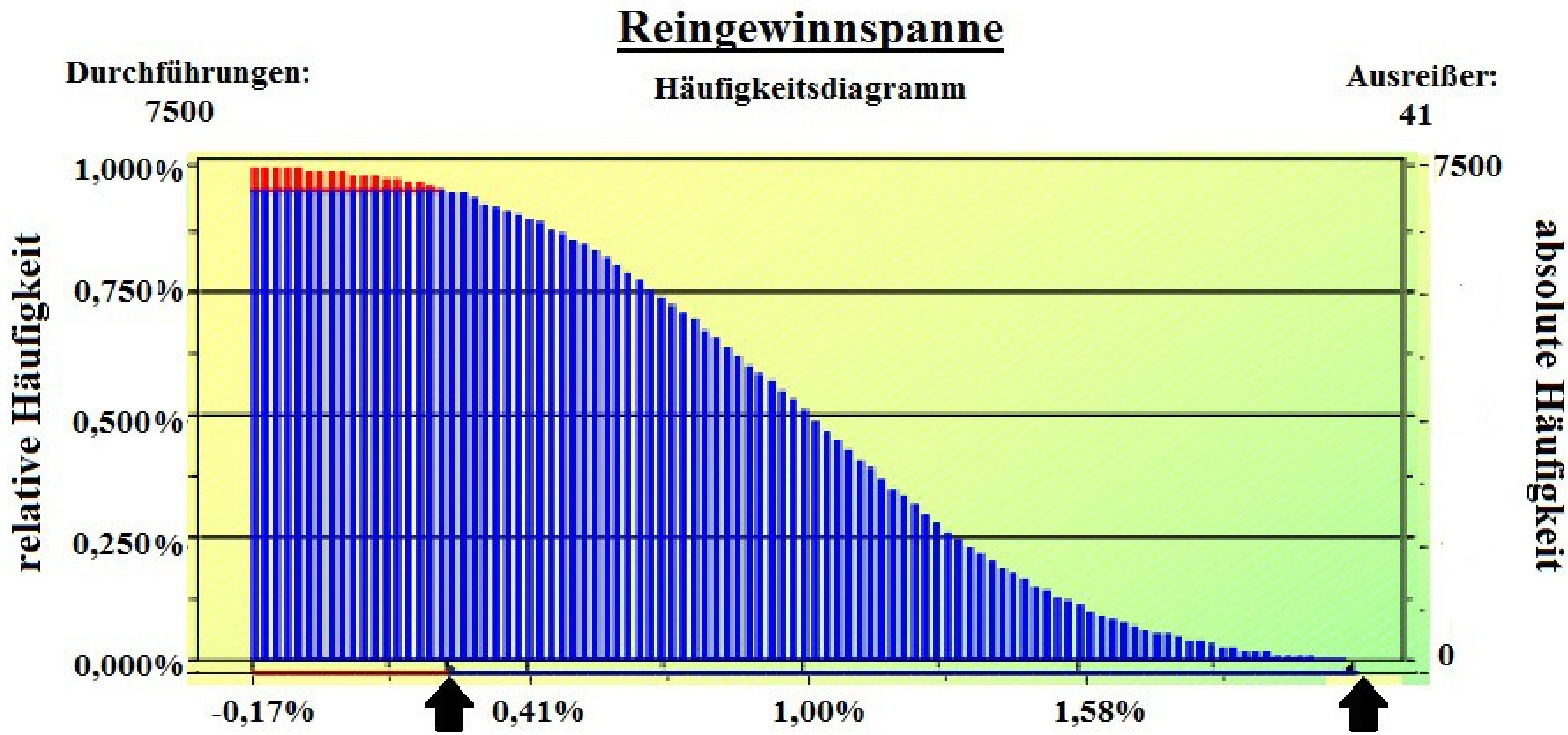
Forecast: Reingeweinnspanne
Durchführungen: 7500
arithmetisches Mittel: 0,99%
Standardabweichung: 0,46%
Varianz: 0%

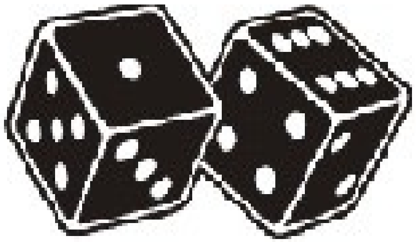
Blick auf Quantile

Wahrscheinlichkeit, dass die Gewinnrate <0,39% ist, liegt bei 10% →

0%	-0,40%
10%	0,39%
20%	0,59%
30%	0,73%
40%	0,87%
50%	0,99%
60%	1,11%
70%	1,24%
80%	1,38%
90%	1,60%
100%	2,38%

Gewinnüberschreitung





→ In 95 von 100 Fällen wird eine Gewinnrate von 0,24% überschritten

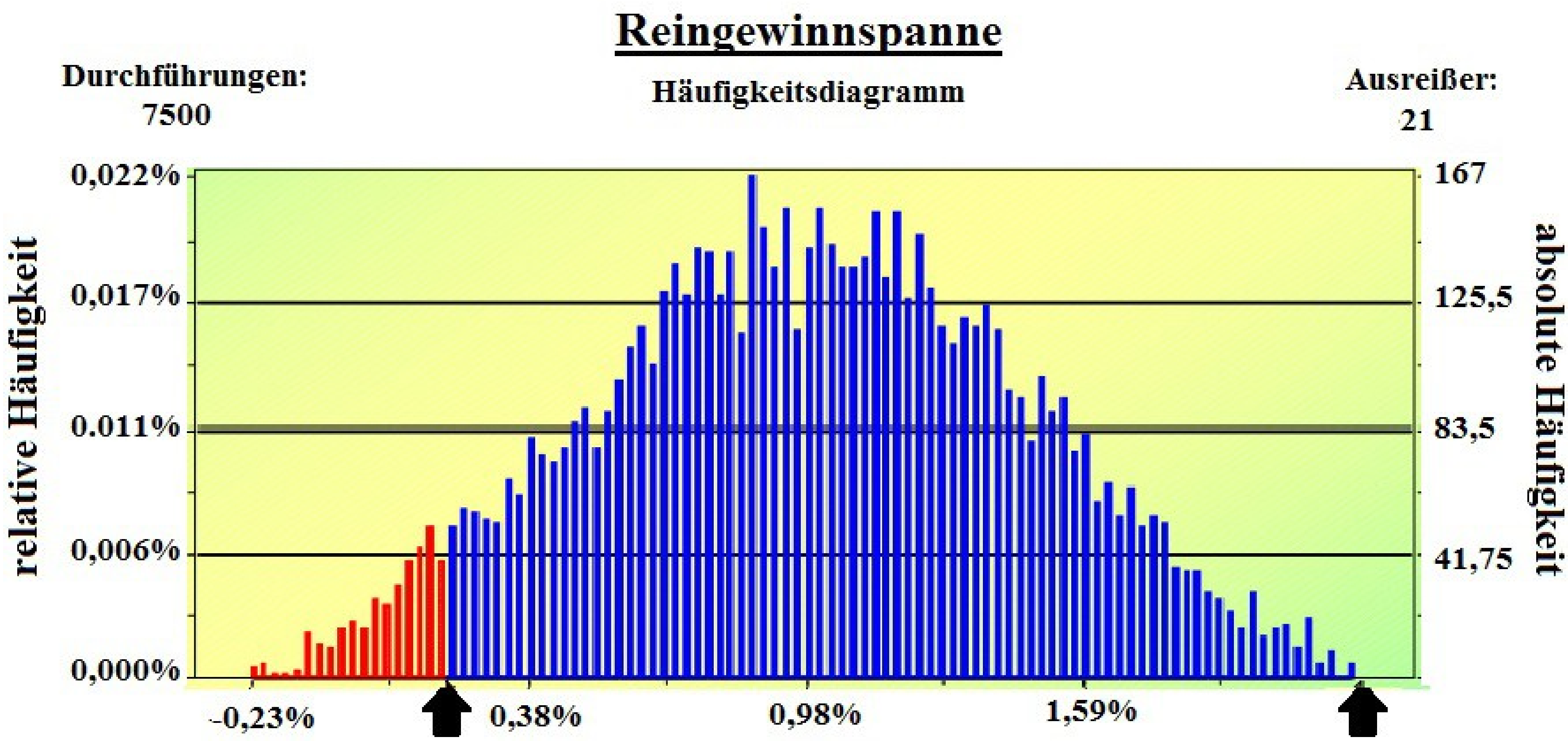
Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Problem: Input- Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Bisher wurde für alle Variablen eine Gleichverteilung angenommen
→ Gleichverteilung sicher nicht für alle Variablen die realistische Verteilung. Es gibt sehr viel Realistischere.

Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung

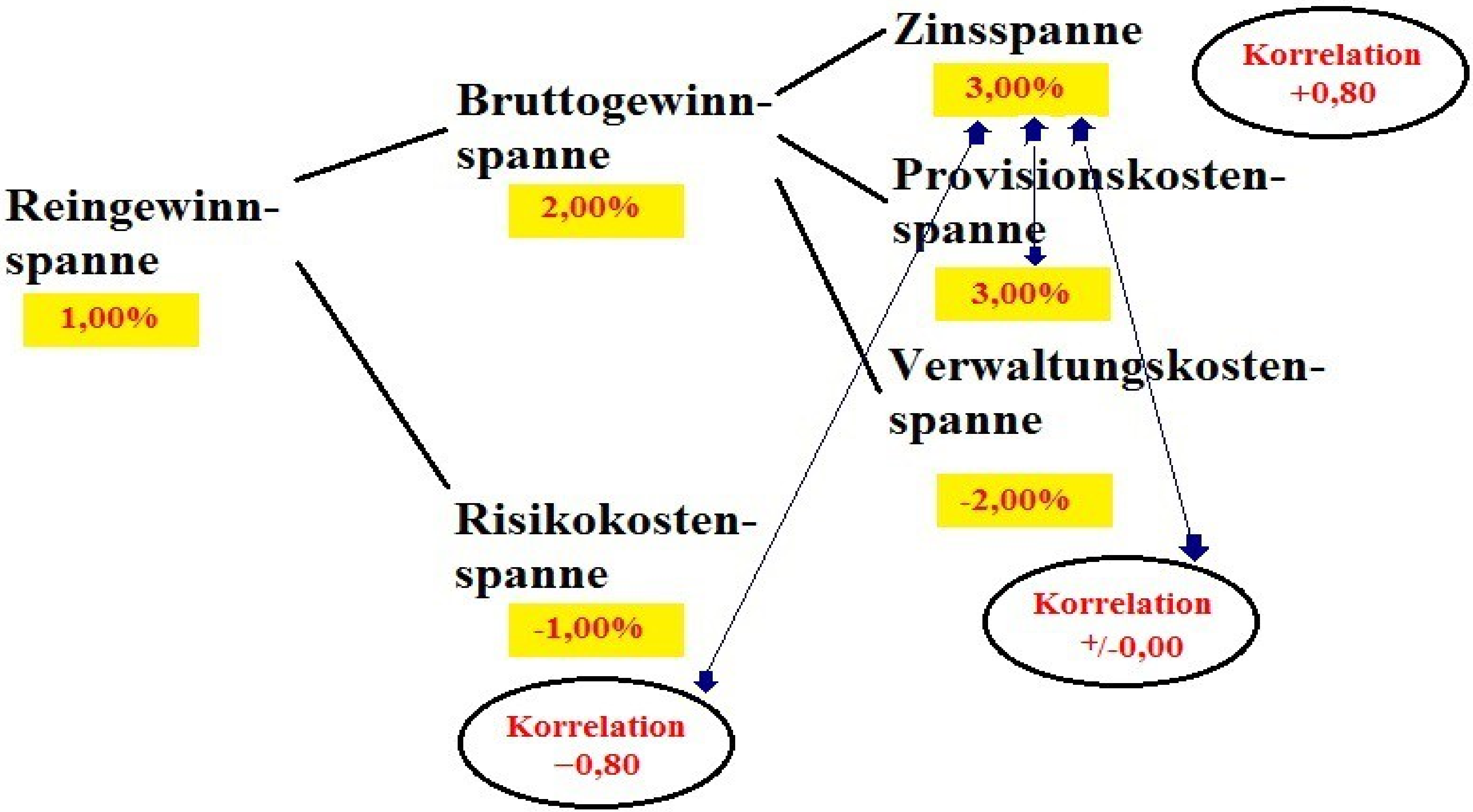
(2. Dreiecksverteilung)



→ In 95 von 100 Fällen wird eine Gewinnrate von 0,20% überschritten

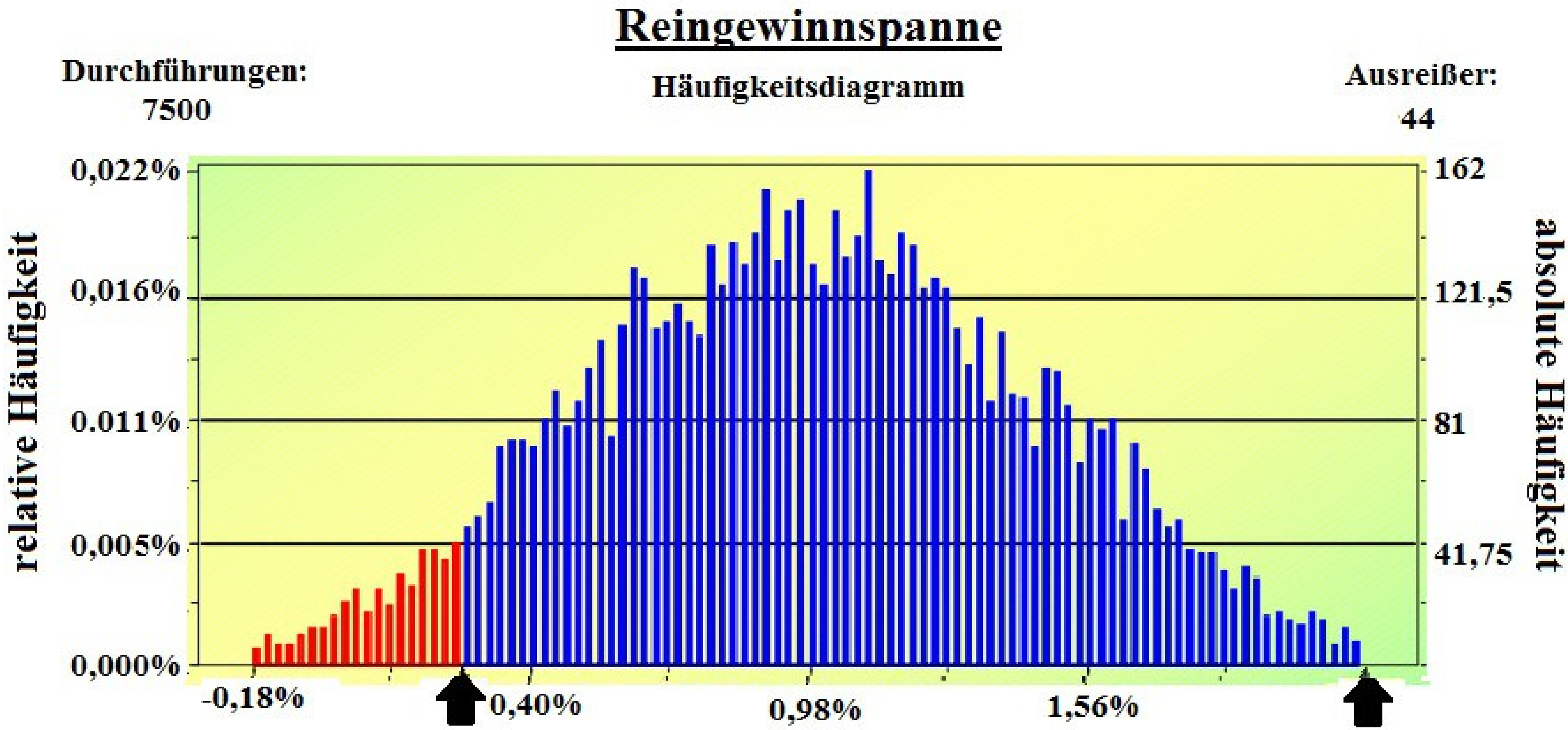
Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung

(Normalverteilung mit Korrelation)



Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung

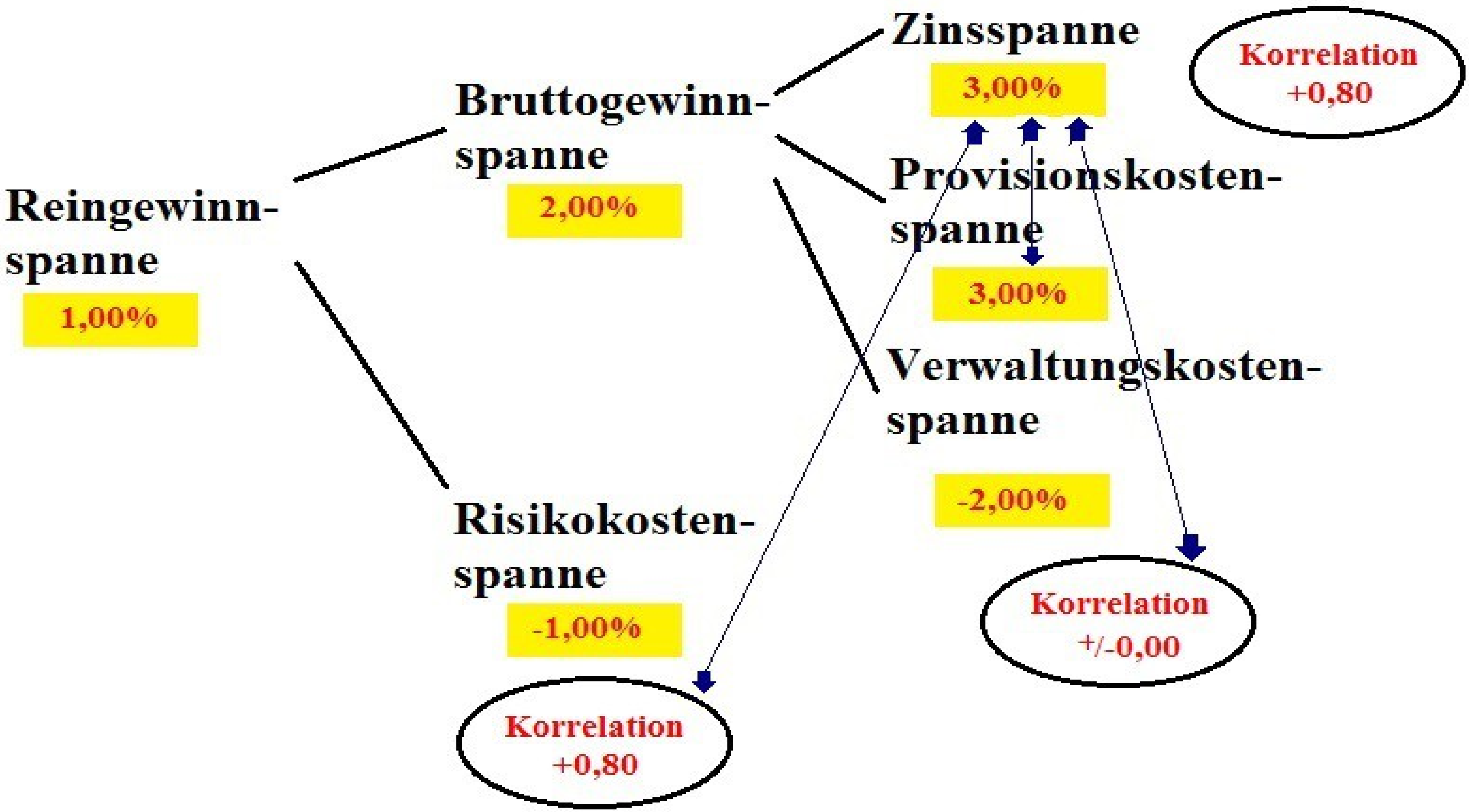
(Normalverteilung mit Korrelation)



→ In 95 von 100 Fällen wird eine Gewinnrate von 0,26% überschritten

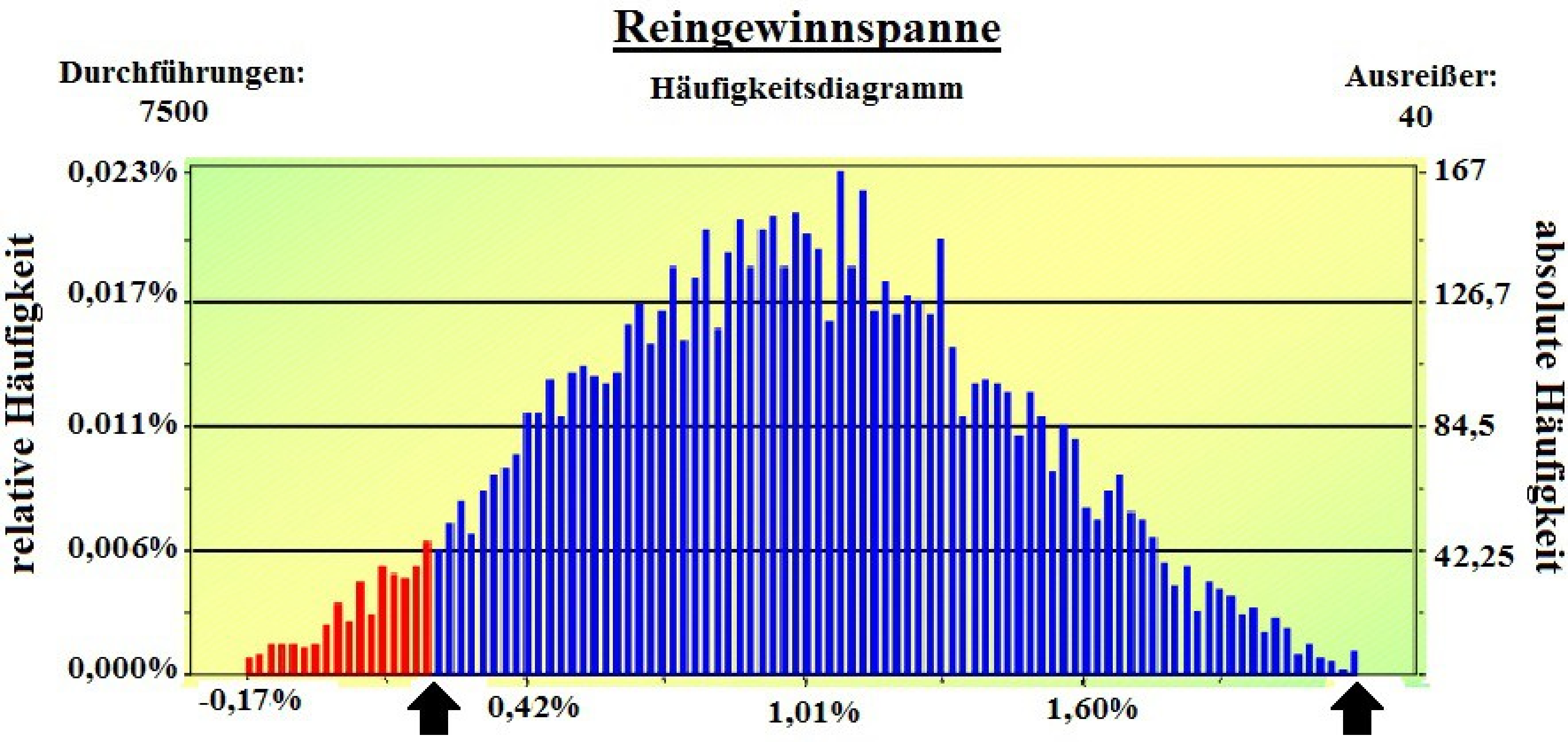
Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung

(Normalverteilung mit Korrelation)



Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung

(Normalverteilung mit Korrelation)



→ In 95 von 100 Fällen wird eine Gewinnrate von 0,23% überschritten

Quantitative Risikoanalyse

(Monte-Carlo als Entscheidungsunterstützung)

- Ziel: Genaues Abwägen von Chancen und Risiken bei der Entscheidungsvorbereitung
- Chancen/Risiken nicht als einzige Zahl oder Parameter darstellen, sondern ganze Bandbreiten berücksichtigen
- Die Inputparameter müssen durch realistische Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Chancen und Risiken abgebildet werden
- Es ist ein möglichst adäquates Modell zu entwickeln (Inputfaktoren, Verknüpfungen, Korrelationen)

Zusammenfassung

- Die Monte-Carlo-Simulation eignet sich Prozesse zu Simulieren, die analytisch nur schwer oder unlösbar sind
- Bei Zufallsversuchen mit geeigneten Wahrscheinlichkeitsverteilungen lassen sich natürliche Ereignisse simulieren

<u>Monte-Carlo ist ein gutes Verfahren für:</u>

- Risikoaggregation
- Risikoquantifizierung

→ Bestimmung des „Value at Risk“

Vor- und Nachteile

Vorteile: → Das Verfahren lässt sich für beliebige, auch stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen durchführen

→ eine große Anzahl von Zufallsvariablen mit unterschiedlichen Verteilungen kann in das Modell integriert werden

→ einfach zu Implementieren

Nachteile: → Nur eine Annäherung zum exaktem Resultat

→ Kann auch sehr stark vom exakten Wert abweichen

Literatur

- Metropolis, Monte Carlo and the MANIAC, Los Alamos Science, Nr. 14,1986, S. 96–108
- Glasserman P. (2004) Monte Carlo methods in financial engineering. Springer
- Korn E., Korn R., Kroisandt G. (2010) Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance. Chapman & Hall, Chapter 4
- Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Monte-Carlo-Simulation

Ende des Vortrags „die Monte-Carlo-Simulation“

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Gibt es Fragen oder Anmerkungen?