10 ARIMA-Modelle für nicht-stationäre Zeitreihen

In diesem Abschnitt untersuchen wir einige praktische Aspekte bei der Wahl eines geeigneten Modells für eine beobachtete Zeitreihe $X_1, \ldots, X_n$. Falls

– die Reihe ein stationäres Verhalten zeigt (Grafik) <u>und</u>

– die Autokovarianzen schnell genug abklingen,

so legt man i.A. ein ARMA(p, q)-Modell zugrunde.

Falls nicht, versucht man, durch geeignete Transformation (z.B. Differenzenbildung) zu einer ARMA(p, q)-Reihe zu kommen.

Definition 10.1. *(ARIMA(p, d, q)-Reihe) Für $d \in \mathbb{N}_0$ heißt $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine ARIMA(p, d, q)-Reihe, falls die Zeitreihe $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $Y_n = (1 - B)^d X_n$, $n \in \mathbb{Z}$, eine <u>kausale</u> ARMA(p, q)-Reihe bildet.*
[<u>A</u>uto<u>R</u>egressive <u>I</u>ntegrierte <u>M</u>oving <u>A</u>verage-Zeitreihe].

D.h., eine ARIMA(p, d, q)-Reihe genügt der Differenzengleichung

(10.1) $\quad a^*(B)\, X_n \;=\; a(B)(1 - B)^d\, X_n \;=\; b(B)\, e_n, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$

mit $\{e_n\} \overset{\mathcal{D}}{\sim} WN(0, \sigma^2)$, dem Backward-Shift-Operator B und Polynomen

$$\begin{array}{lclclcl} a^*(z) &=& a(z)(1-z)^d &=& (1 - a_1 z - \cdots - a_p z^p)(1-z)^d & , & a_p \neq 0\,, \\ b(z) &=& 1 + b_1 z + \cdots + b_q z^q & & & , & b_q \neq 0\,, \end{array}$$

wobei $a(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$ (Kausalität). Das Polynom $a^*(\cdot)$ besitzt also eine d-fache Nullstelle bei $z = 1$.

Bemerkung 10.1.

a) Bei $d \geq 1$ kann ein polynomialer Trend der Ordnung $d - 1$ zu $\{X_n\}$ addiert werden, ohne die Gleichungen (10.1) zu verletzen. Daher gilt:

$\{X_n\}$ ist stationär $\iff$ $d = 0$.

b) EX_n und $Cov(X_n, X_m)$ sind durch (10.1) <u>nicht</u> eindeutig festgelegt.

c) Für eine Vorhersage werden zusätzliche Bedingungen an $\{X_n\}$ benötigt (s.u.).

Beispiel 10.1. $\{X_n\}$ ist ARIMA(1,1,0)-Reihe, falls für $|\alpha| < 1$ gilt:

$$(1-\alpha B)(1-B)\,X_n \;=\; e_n\,, \qquad \text{d.h.}$$

$$Y_n \;=\; (1-B)X_n \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j\, e_{n-j}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

wobei $\{e_n\} \overset{\mathcal{D}}{\sim} WN(0,\sigma^2)$. Folglich:

$$X_n \;=\; X_0 + \sum_{j=1}^{n} Y_j\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \quad \text{sowie} \quad X_{-n} \;=\; X_0 - \sum_{j=0}^{n-1} Y_{-j}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Typisch für ARIMA-Zeitreihen: Es gibt langsam abklingende positive (oder oszillierende) Autokovarianzen.

Ferner: Es werden nur spezielle Nicht-Stationaritäten modelliert.

Wichtig: Identifikation der Modellordnungen (p, q und d).

Oft gelingt eine angemessene Modellierung erst nach vorheriger Transformation, z.B. Box-Cox (1964)-Transformationen:

$$f_\lambda(X_j) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\{X_j - 1\} & , \; X_j \geq 0 \qquad (\lambda > 0) \qquad \underline{\text{bzw.}} \\ \ln X_j & , \; X_j > 0 \qquad (\lambda = 0)\,. \end{cases}$$

Identifikation: Sei $\{X_j\}$ trendbereinigte, ggf. transformierte Zeitreihe, für die ein ARMA(p,q)-Modell angepasst werden soll.

Man beachte: Es besteht die Gefahr der Überanpassung (“Overfitting”), z.B. können 100 beobachtete Werte (etwa) einer Zeitreihe $Y_j = a + b_j + \varepsilon_j$ $(j = 1, \ldots, 100)$ perfekt durch ein Polynom 99-sten Grades angepasst werden, das aber offenbar das Modell weit verfehlt.

Daher: Anpassungskriterien, die “Overfitting” verhindern sollen.

FPE-Kriterium (Akaike, 1969) [Minimiere “Final Prediction Error”]:

FPE: (Geschätzter) 1-Schritt-Vorhersagefehler einer von $\{X_1, \ldots, X_n\}$ unabhängigen Realisation, etwa $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$, derselben Zeitreihe.

Sei z.B. $\{X_1, \ldots, X_n\}$ Abschnitt einer kausalen AR(p)-Reihe und $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ unabhängig von $\{X_1, \ldots, X_n\}$ mit derselben Struktur; ferner seien $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_p$ die

ML-Schätzer von $a_1, \dots, a_p$, basierend auf $X_1, \dots X_n$. Betrachte den (geschätzten) 1-Schritt-Vorhersagefehler

$$E\big(Y_{n+1} - \hat{a}_1 Y_n - \cdots - \hat{a}_p Y_{n+1-p}\big)^2 .$$

Mit $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)^\top$, $Y^{(n,p)} = (Y_n, \dots, Y_{n+1-p})^\top$, $a = (a_1, \dots, a_p)^\top$, $\hat{a} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)^\top$ erhält man:

$$\begin{aligned} E\big(Y_{n+1} - \hat{a}^\top Y^{(n,p)}\big)^2 &= E\big(Y_{n+1} - a^\top Y^{(n,p)} - (\hat{a}-a)^\top Y^{(n,p)}\big)^2 \\ &\overset{\text{Kausalität}}{=} \sigma^2 + E\Big(E\big\{(\hat{a}-a)^\top Y^{(n,p)} Y^{(n,p)^\top} (\hat{a}-a) \,\big|\, X^{(n)}\big\}\Big) \\ &\underset{\text{unabhängig}}{\overset{X^{(n)}, Y^{(n,p)}}{=}} \sigma^2 + E\big\{(\hat{a}-a)^\top \Gamma_p (\hat{a}-a)\big\} \quad \text{mit} \quad \Gamma_p = \big(\!\big(\gamma(j-k)\big)\!\big)_{j,k=1,\dots,p} . \end{aligned}$$

Bei $\{e_n\} \overset{\mathcal{D}}{\sim} IID(0, \sigma^2)$ gilt (vgl. Brockwell & Davis (1991), Theorem 8.1.1):

$$\begin{aligned} &\sqrt{n}\,(\hat{a}-a) \overset{\mathcal{D}}{\approx} N\big(\underline{0}, \sigma^2\,\Gamma_p^{-1}\big) \qquad \text{und daher} \\ &n\,(\hat{a}-a)^\top \Gamma_p (\hat{a}-a) \overset{\mathcal{D}}{\approx} \sigma^2 \mathcal{X}_p^2 , \qquad \text{d.h.} \\ &E\big((\hat{a}-a)^\top \Gamma_p (\hat{a}-a)\big) \approx \sigma^2 \frac{p}{n} , \qquad \text{also} \\ &E\big(Y_{n+1} - \hat{a}_1 Y_n - \cdots - \hat{a}_p Y_{n+1-p}\big)^2 \approx \sigma^2 \left(1 + \frac{p}{n}\right) . \end{aligned}$$

Ersetzt man σ^2 durch die ML-Schätzung $\hat{\sigma}^2$ und beachtet (vgl. Brockwell & Davis (1991), § 8.9)

$$n\,\hat{\sigma}^2 \overset{\mathcal{D}}{\approx} \sigma^2 \mathcal{X}_{n-p}^2 , \qquad \text{d.h.} \quad \frac{n\,\hat{\sigma}^2}{n-p} \quad \text{asymptotisch erwartungstreu,}$$

so motiviert dies den Ansatz: <u>Minimiere</u>

$$\boxed{FPE := \frac{n\,\hat{\sigma}^2}{n-p}\left(1 + \frac{p}{n}\right) = \hat{\sigma}^2\, \frac{n+p}{n-p} .}$$

Allgemeiner anwendbar ist das

<u>AIC-Kriterium</u> (Akaike 1973) ["<u>A</u>kaike's <u>I</u>nformation <u>C</u>riterion"]:

Es basiert auf der <u>Kullback-Leibler-Information</u> (dem Kullback-Leibler-Index) einer W-Dichte $f(\,\cdot\,;\vartheta)$ bzgl. einer anderen $f(\,\cdot\,;\vartheta_0)$, d.h. auf

$$I(\vartheta|\vartheta_0) := \int -2\log\big(f(x;\vartheta)\big)\, f(x;\vartheta_0)\, dx = E_{\vartheta_0}\big\{-2\log\big(f(X;\vartheta)\big)\big\} .$$

Die Jensen'sche Ungleichung liefert für die <u>Kullback-Leibler-Diskrepanz</u> $d(\vartheta|\vartheta_0) := I(\vartheta|\vartheta_0) - I(\vartheta_0|\vartheta_0)$:

$$d(\vartheta|\vartheta_0) \;\geq\; -2\,\log \int \frac{f(x,\vartheta)}{f(x,\vartheta_0)}\, f(x,\vartheta_0)\,dx \;=\; 0\,,$$

wobei "=" genau dann gilt, wenn $P_\vartheta^X = P_{\vartheta_0}^X$.

Seien $\{X_1,\ldots,X_n\}$ Abschnitt einer kausalen ARMA(p,q)-Reihe und $\{Y_1,\ldots,Y_n\}$ unabhängig von $\{X_1,\ldots,X_n\}$ mit derselben Struktur. Analog zum FPE betrachtet man die (geschätzte) Kullback-Leibler-Information

$$(10.2) \qquad E_{a,b;\sigma^2}\big\{-2\log f(Y;\hat a,\hat b,\hat\sigma^2)\big\}\,,$$

wobei $X=(X_1,\ldots,X_n)^\top$, $Y=(Y_1,\ldots,Y_n)^\top$, $\hat a$, $\hat b$, $\hat\sigma^2$ die Schätzer für die entsprechende Gauß'sche ARMA(p,q)-Reihe bezeichnen (vgl. (9.13)–(9.14)). Mit $S(a,b)=S_X(a,b)$ aus § 9 erhält man für die log-Likelihoodfunktion:

$$-2\log L_Y\big(\hat a,\hat b,\hat\sigma^2\big) \;=\; -2\log L_X\big(\hat a,\hat b,\hat\sigma^2\big) + \frac{1}{\hat\sigma^2}\,S_Y\big(\hat a,\hat b\big) - n$$

$$\Big[\,\text{beachte: } \frac{1}{n}\,S_X\big(\hat a,\hat b\big) \;=\; \hat\sigma 2\,\Big]\,, \qquad \text{folglich}$$

$$\begin{aligned} &E_{a,b,\sigma^2}\big\{-2\log f\big(Y;\hat a,\hat b,\hat\sigma^2\big)\big\} \\ =\;& E_{a,b,\sigma^2}\big\{-2\log L_X\big(\hat a,\hat b,\hat\sigma^2\big)\big\} + E_{a,b,\sigma^2}\Big\{\frac{S_Y\big(\hat a,\hat b\big)}{\hat\sigma^2}\Big\} - n\,. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass

$$E_{a,b,\sigma^2}\,S_Y(\hat a,\hat b) \;\overset{\text{Normalapprox.}}{\approx}\; \sigma^2\,(n+p+q)$$

sowie $S_Y\big(\hat a,\hat b\big)$ asymptotisch unabhängig ist von $\hat\sigma^2$. Daher:

$$(10.3) \quad E_{a,b,\sigma^2}\Big\{\frac{S_Y\big(\hat a,\hat b\big)}{\hat\sigma^2}\Big\} - n \;\approx\; \sigma^2\,(n+p+q)\,E_{a,b,\sigma^2}\Big(\frac{1}{\hat\sigma^2}\Big) - n$$

$$\overset{\text{B\&D}}{\approx}\; \sigma^2\,(n+p+q)\Big(\sigma^2\,\frac{n-p-q-2}{n}\Big)^{-1} - n \;=\; \frac{2\,(p+q+1)\,n}{n-p-q-2}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{AICC\big(\hat a,\hat b\big) \;:=\; -2\log L_X\Big(\hat a,\hat b;\frac{S_X(\hat a,\hat b)}{n}\Big) + \frac{2\,(p+q+1)\,n}{n-p-q-2}}$$

ist asymptotisch erwartungstreuer Schätzer der (geschätzten) Kullback-Leibler-Information in (10.2), falls a,b,σ^2 bzw. p,q die zutreffenden Parameterwerte sind. Wähle daher p,q derart, dass AICC$(\hat a,\hat b)$ minimiert wird.

[Akaike's Information Criterion Corrected]

Das "Akaike Information Criterion"

$$\boxed{AIC\big(\hat{a},\hat{b}\big) \;:=\; -2\log L_X\Big(\hat{a},\hat{b};\frac{S_X(\hat{a},\hat{b})}{n}\Big)+2\,(p+q+1)\,n}$$

benutzt eine andere Approximation in (10.3), kann aber ansonsten entsprechend verwendet werden.

Weitere Modelldiagnose:

Da die gewichteten Innovationen $W_j = \big(X_j-\hat{X}_j\big)/\sqrt{r_{j-1}}$ mit $r_{j-1}=E\big(X_j-\hat{X}_j\big)^2/\sigma^2$ $(j=1,\ldots,n)$ paarweise orthogonal sind, mit $EW_j=0$, $EW_j^2=\sigma^2$, also den Abschnitt einer $WN(0,\sigma^2)$-Reihe bilden, sollten sich auch die (so genannten) Residuen

$$(10.4)\qquad \hat{W}_j \;=\; \frac{X_j-\hat{X}_j\big(\hat{a},\hat{b}\big)}{\sqrt{r_{j-1}\big(\hat{a},\hat{b}\big)}}\,,\qquad j=1,2,\ldots,$$

näherungsweise wie ein weißes Rauschen $WN(0,\hat{\sigma}^2)$ verhalten.

Eine andere mögliche Wahl der Residuen ist:

$$\hat{e}_j \;=\; \hat{b}^{-1}(B)\,\hat{a}(B)\,X_j\,,\qquad j=1,\ldots,n\,,$$

wobei $\hat{a}(z):=1-\hat{a}_1\,z-\cdots-\hat{a}_p\,z^p$, $\hat{b}(z)=1+\hat{b}_1\,z+\cdots+\hat{b}_q\,z^q$ und $X_j:=0$, falls $j\le 0$.

Zu Tests auf Vorliegen eines weißen Rauschens vgl. Brockwell & Davis (1991), § 9.4.

Vorhersage von ARIMA-Zeitreihen:

I.A. sind die E.W. EX_j und 2. Momente EX_jX_{j+k} einer ARIMA(p,d,q)-Reihe nicht durch die Modellgleichungen (10.1) eindeutig festgelegt.

Sei z.B. $\{Y_j\}_{j=1,2,\ldots}$ eine zentrierte, kausale ARMA(p,q)-Reihe und

$$X_j = X_0+\sum_{\ell=1}^{j} Y_\ell\qquad (j=1,2,\ldots)$$

mit einer quadratintegrierbaren ZV. X_0, so bildet $\{X_j\}_{j=0,1,\ldots}$ eine ARIMA$(p,1,q)$-Reihe mit E.W. $EX_j=EX_0$ und Autokovarianzen, die von $Var(X_0)$ und den Kovarianzen $Cov(X_0,Y_j)$ abhängen.

Beste lineare Vorhersage: Sei $\mathcal{M}_n=[\{X_0,X_1,\ldots,X_n\}]=[\{X_0,Y_1,\ldots,Y_n\}]$, so ergibt sich:

$$\hat{X}_{n+1} \;=\; P_{\mathcal{M}_n}\,(X_0+Y_1+\cdots+Y_{n+1}) \;=\; X_n+P_{\mathcal{M}_n}\,Y_{n+1}\,,$$

wobei letztere Projektion von EX_0Y_j $(j = 1, \ldots, n+1)$ und EX_0^2 abhängt.

Sind X_0 und die $\{Y_j\}$ unkorreliert, so gilt:

$$P_{[\{X_0, Y_1, \ldots, Y_{n+1}\}]} Y_{n+1} = P_{[\{Y_1, \ldots, Y_n\}]} Y_{n+1} ,$$

d.h., es genügt die Kenntnis der acv.f. von $\{Y_j\}$ für die Vorhersage von $\{X_j\}$.

Allgemeiner Fall: Die beobachtete Zeitreihe $\{X_j\}_{j=1,2,\ldots}$ genüge der Differenzengleichung

$$(10.5) \qquad (1-B)^d X_j = Y_j , \qquad j = 1, 2, \ldots ,$$

wobei $\{Y_j\}$ eine kausale ARMA(p,q)-Reihe sei und B der Backward-Shift-Operator.

Annahme: $\{X_{1-d}, X_{2-d}, \ldots, X_0\}$ und $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ sind orthogonal, d.h. paarweise unkorreliert.

Es seien $n+d$ Werte, etwa $X_{1-d}, X_{2-d}, \ldots, X_n$ von $\{X_j\}$, d.h. n Werte $Y_1, \ldots, Y_n$ von $\{Y_j\}$ beobachtet worden.

Gesucht: $P_{\mathcal{M}_n} X_{n+h} = P_{[\{X_{1-d}, \ldots, X_n\}]} X_{n+h} \quad (h = 1, 2, \ldots)$.

Setze $P_n Y_{n+h} := P_{[\{Y_1, \ldots, Y_n\}]} Y_{n+h}$, $\hat{Y}_{n+1} = P_n Y_{n+1}$.

Da $\quad \mathcal{M}_n = [\{X_{1-d}, \ldots, X_0; Y_1, \ldots, Y_n\}]$

und $\quad [\{X_{1-d}, \ldots, X_0\}] \perp [\{Y_1, \ldots, Y_n\}]$,

erhält man:

$$(10.6) \qquad P_{\mathcal{M}_n} Y_{n+h} = P_{\mathcal{M}_0} Y_{n+h} + P_n Y_{n+h} = P_n Y_{n+h} .$$

Eine Anwendung von (10.6) auf die Gleichung (10.5) liefert:

$$(10.7) \qquad P_{\mathcal{M}_n} X_{n+h} \overset{(10.5)}{=} P_{\mathcal{M}_n}\left(Y_{n+h} - \sum_{j+1}^{d} \binom{d}{j} (-1)^j X_{n+h-j} \right)$$

$$\overset{(10.6)}{=} P_n Y_{n+h} - \sum_{j+1}^{d} \binom{d}{j} (-1)^j P_{\mathcal{M}_n} X_{n+h-j} .$$

Da die Vorhersagen $P_n Y_{n+h}$ der ARMA(p,q)-Reihe $\{Y_j\}$ gemäß § 7 rekursiv bestimmt werden können, lassen sich die Vorhersagen $P_{\mathcal{M}_n} X_{n+1}, P_{\mathcal{M}_n} X_{n+2}, \ldots$ also gemäß (10.7) ebenfalls rekursiv berechnen. Man beachte: $P_{\mathcal{M}_n} X_{n+1-j} = X_{n+1-j}$ $(j = 1, \ldots, d)$.

Mit $X^*_{k+1} = P_{\mathcal{M}_k} X_{k+1}$ liefern (10.5) und (10.7):

$$X_{k+1} - X^*_{k+1} = Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1} , \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Folglich für $n > r = \max(p,q)$ und $h \geq 1$ $\big($vgl. (7.8)/(7.13)$\big)$:

$$(10.8) \quad P_n\, Y_{n+h} \;=\; \sum_{j=1}^{p} a_j\, P_n\, Y_{n+h-j} + \sum_{j=h}^{q} d_{n+h-1,j}\,\big(X_{n+h-j} - X^*_{n+h-j}\big)\,.$$

Mit $a^*(z) = (1-z)^d\, a(z) = 1 - a_1^*\, z - \cdots - a^*_{p+d}\, z^{p+d}$ liefern (10.6)–(10.8):

$$(10.9) \quad P_{\mathcal{M}_n}\, X_{n+h} \;=\; \sum_{j=1}^{p+d} a_j^*\, P_{\mathcal{M}_n}\, X_{n+h-j} + \sum_{j=h}^{q} d_{n+h-1,j}\,\big(X_{n+h-j} - X^*_{n+h-j}\big)\,,$$

analog zu (7.8)/(7.13) für die h-Schritt-Vorhersagen von ARMA(p,q)-Reihen.

Zum Vorhersagefehler: vgl. Brockwell & Davis (1991), Formeln (9.5.6) und (9.5.7).

Abschließend noch einige Bemerkungen zu

SARIMA-(saisonale ARIMA-)Zeitreihen:

Statt des klassischen Modells $X_j = m_j + s_j + Y_j$, $j \in \mathbb{Z}$ mit deterministischen Trend- und Saisonkomponenten m_j und s_j betrachtet man die trendbereinigte Zeitreihe mit zufälliger Saisonkomponente, z.B. Monatsdaten über verschiedene Jahre erhoben:

		Monat			
		1	2	...	12
Jahr	1	X_1	X_2	...	X_{12}
	2	X_{13}	X_{14}	...	X_{24}
	3	X_{15}	X_{26}	...	X_{36}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	r	$X_{1+12(r-1)}$	$X_{2+12(r-1)}$	...	$X_{12+12(r-1)}$

Modellierung, z.B. für Monat $k = 1, \ldots, 12$:

$$(10.10) \quad \begin{cases} X_{k+12j} - A_1 X_{k+12(j-1)} - \cdots - a_P X_{k+12(j-P)} \\ = \; U_{k+12j} + B_1 U_{k+12(j-1)} + \cdots + B_Q U_{k+12(j-Q)} \end{cases}$$

mit $\{U_{k+12j}\}_{j\in\mathbb{Z}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} WN(0,\sigma_U^2)$, d.h., man modelliert dasselbe ARMA(P,Q)-Modell für die "Zwischenjahreswerte".

Man beachte, dass i.A. $E\, U_j\, U_{j+h} \neq 0$, falls $h \neq 12$.

Mit $A(z) = 1 - A_1\, z - \cdots - A_P\, z^P$, $B(z) = 1 + B_1\, z + \cdots + B_Q\, z^Q$, $z \in \mathbb{C}$, und dem Backward-Shift-Operator B^{12} gilt:

$$(10.10') \quad A(B^{12})\, X_j \;=\; B(B^{12})\, U_j, \qquad j \in \mathbb{Z}\,,$$

wobei $\{U_{k+12j}\} \overset{\mathcal{D}}{\sim} WN(0,\sigma_U^2)$.

Zur Modellierung der Abhängikeiten der 12 verschiedenen „Zwischenjahresreihen“ wähle man z.B. ein ARMA(p,q)-Modell für die Folge $\{U_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, d.h.

(10.11) $a(B)\,U_j \;=\; b(B)\,e_j\,,\quad j\in\mathbb{Z}\,,$

mit $a(z)=1-a_1z-\cdots-a_pz^p$, $b(z)=1+b_1z+\cdots+b_qz^q$, $\{e_j\}\overset{\mathcal{D}}{\sim}WN(0,\sigma2)$.

Man beachte, dass i.A.

$$E\,U_j\,U_{j+h}\neq 0\quad\forall\, j,h\quad \underline{\text{aber}}$$

$$E\,U_j\,U_{j+12h}\quad \text{„klein“}\,.$$

Eine Kombination von (10.10) und (10.11) und Zulassen vorheriger Differenzenbildung liefert:

Definition 10.2. *($SARIMA\,(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$-Reihe) Für $d,D\in\mathbb{N}_0$ heißt $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ <u>saisonale $ARIMA\,(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$-Reihe)</u> mit Periode s, falls die Reihe $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ mit $Y_j=(1-B^1)^d(1-B^s)^DX_j$ eine <u>kausale</u> $ARMA(p,q)$-Reihe bildet, d.h.*

$$a(B^1)A(B^s)\,Y_j \;=\; b(B^1)B(B^s)\,e_j\,,\quad j\in\mathbb{Z}\,,$$

wobei $\{e_j\}\overset{\mathcal{D}}{\sim}WN(0,\sigma^2)$ und $a(z)=1-a_1z-\cdots-a_pz^p$, $a_p\neq0$, $A(z)=1-A_1z-\cdots-A_Pz^P$, $A_P\neq0$, $b(z)=1+b_1z+\cdots+b_qz^q$, $b_q\neq0$, $B(z)=1+B_1z+\ldots+B_Qz^Q$, $B_Q\neq0$.

Bemerkung 10.2.

a) $\{Y_j\}$ kausal $\Longrightarrow$ $a(z)\neq0\neq A(z)$ $(|z|\leq1)$;

b) In Anwendungen: $D\leq1$ und $P,Q\leq3$.

<u>Schritte zur Anpassung eines SARIMA-Modells</u>:

1) Finde d,D so, dass die differenzierte Reihe

$$Y_j \;=\; (1-B)^d(1-B^s)^D\,X_j\,,\quad j\in\mathbb{Z}\,,$$

ein stationäres Verhalten zeigt (s.o.).

2) Finde P,Q so, dass die geschätzten Autokorrelationen $\hat\rho(sh)$, $h=1,2,\ldots$, von $\{Y_j\}$ zum „Lag h“ zu denen einer ARMA(P,Q)-Reihe vergleichbar sind.

3) Finde p,q so, dass $\hat\rho(1),\ldots,\hat\rho(s-1)$ zu den Autokorrelationen einer ARMA(p,q)-Reihe vergleichbar sind.

Zu weiteren Einzelheiten und Beispielen vgl. Brockwell & Davis (1991), § 10.6.