Übungen zur „Differentialgeometrie“

Lösung zu Übungsblatt 10

Allgemeine Vorbemerkung: Die folgende Musterlösung ist an vielen Stellen deutlich detaillierter als es von Ihnen in der Abgabe verlangt wird.

1. Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und U eine normale Umgebung von p in M sowie V eine offene Umgebung von 0_p in T_pN, so dass $\exp_p|_V$ ein Diffeomorphismus aufs Bild $\exp_p(V) = U$ ist. Sei weiter $F : (T_pM, g_p) \to (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine lineare Isometrie. Wir definieren eine Karte (U, φ) („riemannsche Normalkoordinaten“) von M um p mit Kartenabbildung $\varphi := F \circ (\exp_p|_V)^{-1}$, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$. Zeigen Sie, dass bezüglich dieser Karte

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \qquad \Gamma^k_{ij}(p) = 0, \qquad \tfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p) = 0$$

für alle $i, j, k = 1, \ldots, n$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie zum Beweis der zweiten Gleichung die Geodätischengleichung für $t \mapsto \exp_p(tv)$ in riemannschen Normalkoordinaten.

Lösung:

Wir berechnen zunächst $\partial_i(p) = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(e_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es ist

$$\varphi(p) = F((\exp_p|_V)^{-1}(p)) = F(0_p) = 0$$

und $\varphi^{-1} = \exp_p \circ F^{-1}$. Nach dem Beweis von Proposition 2.37 gilt weiter $d(\exp_p)_{0_p} = \mathrm{id}_{T_pM}$ und zusätzlich ist $d(F^{-1})_x = F^{-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, da F^{-1} linear ist. Daher folgt

$$\begin{aligned}\partial_i(p) &= d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(e_i) = d(\exp_p \circ F^{-1})_0(e_i) = d(\exp_p)_{F^{-1}(0)}(F^{-1}(e_i)) = d(\exp_p)_{0_p}(F^{-1}(e_i)) \\ &= \mathrm{id}_{T_pM}(F^{-1}(e_i)) = F^{-1}(e_i)\end{aligned}$$

für jedes $i = 1, \ldots, n$ und somit

$$g_{ij}(p) = g_p(\partial_i(p), \partial_j(p)) = g_p(F^{-1}(e_i), F^{-1}(e_j)) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ist, da mit F auch F^{-1} eine lineare Isometrie ist.

Sei nun ein beliebiger Vektor $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben und sei $v := \sum_{i=1}^n v_i \partial_i(p) \in T_pM$. Es gibt dann ein $\epsilon > 0$, so dass $tv \in V$ ist für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ und die Geodätische c_v mit $c_v(0) = p$, $\dot{c}_v(0) = v$ ist dann auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert und durch $c_v(t) := \exp_p(tv)$ für $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ gegeben. Dann ist wegen $\varphi = F \circ (\exp_p|_V)^{-1}$ gerade

$$\begin{aligned}(\varphi \circ c_v)(t) &= \varphi(\exp_p(tv)) = F(tv) = F\left(\sum_{i=1}^n tv_i \partial_i(p)\right) = \sum_{i=1}^n tv_i F(\partial_i(p)) \\ &= \sum_{i=1}^n tv_i F(F^{-1}(e_i)) = \sum_{i=1}^n tv_i e_i,\end{aligned}$$

also $(c_v)_i(t) = tv_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Daher ist $(\dot{c_v})_i \equiv v_i$ und $(\ddot{c_v})_i \equiv 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Da c_v Geodätische ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (\ddot{c_v})_k(0) + \sum_{i,j=1}^{n} (\dot{c_v})_i(0)\,(\dot{c_v})_j(0)\,\Gamma_{ij}^k(c_v(0)) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \Gamma_{ij}^k(p) \\ &= (v_1, \ldots, v_n) \cdot M_k \cdot (v_1, \ldots, v_n)^T \end{aligned}$$

für alle $k = 1, \ldots, n$, wobei $M_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch $M_k := (\Gamma_{ij}^k(p))_{i,j=1,\ldots,n}$ für $k = 1, \ldots, N$ definiert ist und nach Bemerkung 2.18 symmetrisch ist. Daher muss $M_k = 0$ sein für alle $k = 1, \ldots, n$, also $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ für alle $i, j, k = 1, \ldots, n$ sein:

Denn betrachten wir für fixes $k \in \mathbb{N}$ die zugehörige symmetrische Bilinearform $\beta_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\beta_k(x, y) = x^T M_k y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$, so gibt es nach dem Trägheitssatz von Sylvester eine Basis $(f_1, \ldots, f_n)$ von $\mathbb{R}^n$ mit $\beta_k(f_i, f_j) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ und nach dem oben gezeigtem folgt $\beta_k(f_i, f_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, also $\beta_k = 0$, was äquivalent zu $M_k = 0$ ist (alternativ benutze Polarisierung statt des Trägheitssatzes von Sylvester um die Aussage zu beweisen).

Schließlich gilt aufgrund der Metrizität von ∇^g nach Bemerkung 2.18 und den obigen Ergebnissen

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p) = \sum_{l=1}^{n} \left(\Gamma_{ki}^l(p)\, g_{lj}(p) + \Gamma_{kj}^l(p)\, g_{il}(p)\right) = 0$$

für alle $i, j, k = 1, \ldots, n$.

2. Es seien (M, g) und (N, h) zusammenhängende pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie:

   (a) Sind $f, g : M \to N$ zwei Isometrien von (M, g) nach (N, h) und existiert ein Punkt $p \in M$ mit $f(p) = g(p)$ und $df_p = dg_p$, so ist bereits $f = g$.

   Hinweis: Betrachten Sie die Menge aller Punkte $q \in M$ mit $f(q) = g(q)$ und $df_q = dg_q$ und verwenden Sie Blatt 9, Aufgabe 2 (c).

   (b) Ist Γ eine diskrete Lie-Gruppe von Isometrien von (M, g), die auf M frei und eigentlich wirkt, so gibt es auf der Mannigfaltigkeit M/Γ genau eine pseudo-riemannsche Metrik $\tilde{g}$, so dass die natürliche Projektion $\pi : (M, g) \to (M/\Gamma, \tilde{g})$ eine *pseudo-riemannsche Überlagerung* ist, d.h. π ist eine Überlagerung, differenzierbar und $g = \pi^*\tilde{g}$.

Lösung:

(a) Wir setzen

$$A := \{q \in M \,|\, f(q) = g(q),\, df_q = dg_q\}\,.$$

Dann ist nach Voraussetzung $p \in A$, also $A \neq \emptyset$. Weiter ist A offensichtlicht abgeschlossen, da $f, g : M \to N$ und $df, dg : TM \to TN$ stetig sind. Wir zeigen, dass A offen ist. Dann ist A als nicht-leere, offene und abgeschlossene Teilmenge der zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M gleich M, also insbesondere $f(q) = g(q)$ für alle $q \in M$.

Sei also ein $q \in A$ gegeben. Wir nehmen uns einen geodätischen Ball $B = \exp_q(B_\epsilon^{g_q}(0_q))$ um q, $\epsilon > 0$. Ist nun $\tilde{q} \in B$, so gibt es also ein eindeutiges $v \in B_\epsilon^{g_q}(0_q)$ mit $\tilde{q} = \exp_q(v)$. Wir betrachten die Geodätische $c : (-1, 1 + \delta) \to M$, $c(t) := \exp_q(tv)$ von (M, g) für ein geeignetes $\delta > 0$. Dann ist nach Blatt 9, Aufgabe 2 (c) sowohl $f \circ c : (-1, 1 + \delta) \to N$ als auch $g \circ c : (-1, 1 + \delta) \to N$ eine Geodätische von (N, h). Weiter ist $f(c(0)) = f(p) = g(p) = g(c(0))$ und

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ c)(0) = df_{c(0)}(\dot{c}(0)) = df_p(\dot{c}(0)) = dg_p(\dot{c}(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (g \circ c)(0).$$

Da Geodätische durch den Anfangspunkt und die Anfangsgeschwindigkeit eindeutig festgelegt sind, folgt $f \circ c = g \circ c$ und somit insbesondere $f(\tilde{q}) = f(\exp_q(v)) = f(c(1)) = g(c(1)) = g(\exp_q(v)) = g(\tilde{q})$. Wir haben also $f|_U = g|_U$ und damit dann natürlich auch $df_{\tilde{q}} = dg_{\tilde{q}}$ für alle $\tilde{q} \in U$, also $U \subseteq A$. Dies zeigt die Offenheit von A und damit wie oben erläutert $f = g$.

(b) Wir bemerken, dass nach Blatt 5, Aufgabe 1 die natürliche Projektion $\pi : M \to M/\Gamma$ eine differenzierbare Überlagerung ist. Wir müssen also nur noch zeigen, dass es genau eine pseudo-riemannsche Metrik $\tilde{g}$ auf M/Γ gibt mit $g = \pi^* \tilde{g}$.

Dazu erinnern wir uns daran, wie wir die differenzierbare Struktur auf M/Γ definiert hatten: Wir hatten zunächst einen differenzierbaren Atlas $\{(U_i, \varphi_i) | i \in I\}$ von M so gewählt, dass für jedes $i \in I$ die Menge $\pi^{-1}(\pi(U_i)) = \bigcup_{f \in \Gamma} f(U_i)$ eine Vereinigung offener disjunkter Teilmengen ist, so dass $\pi|_{f(U_i)} : f(U_i) \to \pi(U_i)$ ein Homöomorphismus ist. Die differenzierbare Struktur auf M/Γ wurde dann als diejenige definiert, die durch den differenzierbaren Atlas $\{(\pi(U_i), \varphi_i \circ (\pi|_{U_i})^{-1}) | i \in I\}$ auf M/G induziert wird.

Da $\varphi_i \circ (\pi|_{U_i})^{-1} \circ (\varphi_i \circ (\pi|_{U_i})^{-1}) = \mathrm{id}_{\varphi_i(U)}$ differenzierbar ist für alle $i \in I$, ist $(\pi|_{U_i})^{-1} : \pi(U_i) \to U_i$ für jedes $i \in I$ differenzierbar, also $\pi|_{U_i} : U_i \to \pi(U_i)$ ein Diffeomorphismus für jedes $i \in I$. Insbesondere ist daher nach dem Umkehrsatz $d\pi_p : T_pM \to T_{\pi(p)}\, M/\Gamma$ für jedes $p \in M$ invertierbar.

Ist nun $\tilde{g}$ eine pseudo-riemannsche Metrik auf M/Γ mit $g = \pi^* \tilde{g}$ und sei $\tilde{q} \in M/\Gamma$ gegeben, so wähle $q \in M$ mit $\pi(q) = \tilde{q}$ und es folgt dann für alle $v, w \in T_{\tilde{q}}\, M/\Gamma$ gerade

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\tilde{q}}(v, w) &= \tilde{g}_{\pi(q)}(d\pi_q((d\pi_q)^{-1}(v)), d\pi_q((d\pi_q)^{-1}(w)) \\ &= (\pi^* \tilde{g})_q((d\pi_q)^{-1}(v), (d\pi_q)^{-1}(w)) = g_q((d\pi_q)^{-1}(v), (d\pi_q)^{-1}(w)).\end{aligned}$$

Dies zeigt die Eindeutigkeit von $\tilde{g}$.

Zur Existenz definieren wir $\tilde{g}$ über die gerade gezeigte Formel. Dies könnte zunächst von der Wahl von $q \in \pi^{-1}(\tilde{q})$ abhängen, tut es aber nicht, da Γ aus Isometrien besteht, siehe die Argumentation, die gleich kommt. Diese Erkenntnis ist auch der wesentliche Schritt dieses Beweises und alles andere sind „nur“ technische Details.

Seien dazu $q_1, q_2 \in M$ mit $\pi(q_1) = \tilde{q} = \pi(q_2)$ gegeben. Dann gibt es nach Definition von M/Γ ein $f \in \Gamma$ mit $f(q_1) = q_2$. Weiter ist $\pi \circ f = \pi$, woraus $d\pi_{q_2} \circ df_{q_1} = d\pi_{f(q_1)} \circ df_{q_1} = d(\pi \circ f)_{q_1} = d\pi_{q_1}$ und somit $(d\pi_{q_2})^{-1} = df_{q_1} \circ (d\pi_{q_1})^{-1}$ und damit, da f eine Isometrie von (M, g) ist, gerade

$$\begin{aligned}g_{q_2}((d\pi_{q_2})^{-1}(v), (d\pi_q)^{-1}(w)) &= g_{f(q_1)}(df_{q_1}((d\pi_{q_1})^{-1}(v)), df_{q_1}((d\pi_{q_1})^{-1}(w)) \\ &= (f^* g)_{q_1}((d\pi_{q_1})^{-1}(v), (d\pi_{q_1})^{-1}(w)) \\ &= g_{q_1}((d\pi_{q_1})^{-1}(v), (d\pi_{q_1})^{-1}(w))\end{aligned}$$

für alle $v, w \in T_{\tilde{q}}\, M/\Gamma$ folgt. Dies zeigt die Wohldefiniertheit von $\tilde{g}$. Durch Umkehrung der obigen Rechnungen sieht man direkt, dass $g = \pi^* \tilde{g}$ ist. Weiter ist klar, dass $\tilde{g}_{\tilde{q}}$ für jedes $\tilde{q} \in M/\Gamma$ nicht ausgeartet ist und die gleiche Signatur wie g_q für $q \in \pi^{-1}(\tilde{q})$ beliebig hat. Insbesondere ist also auch die Signatur von $\tilde{g}$

konstant. Weiter hängt $\tilde{g}$ differenzierbar vom Punkt $\tilde{q}$ ab und ist daher wirklich eine pseudo-riemannsche Metrik:

Sei dazu ein $i = 1 \ldots, n$ fest vorgegeben. Wir müssen dann zeigen, dass für alle $j, k = 1, \ldots, n$ die Funktionen $\tilde{g}_{kl} := \tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) : \pi(U_i) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, wobei wir $\psi := \varphi_i \circ (\pi|_{U_i})^{-1}$, $\varphi := \varphi_i$, $\psi =: (x_1, \ldots, x_n)$ und $\varphi =: (y_1, \ldots, y_n)$ setzen. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\tilde{q}) = d\psi^{-1}_{\psi(\tilde{q})}(e_k) = d\pi_{(\pi|_{U_i})^{-1}(\tilde{q})}\left(d\varphi^{-1}_{\psi(\tilde{q})}(e_k)\right) = d\pi_{(\pi|_{U_i})^{-1}(\tilde{q})}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\left((\pi|_{U_i})^{-1}(\tilde{q})\right)\right)$$

für alle $k = 1, \ldots, n$ und alle $\tilde{q} \in \pi(U_i)$ und damit

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{kl}(\tilde{q}) &= \tilde{g}_{\tilde{q}}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(\tilde{q}), \frac{\partial}{\partial x_l}(\tilde{q})\right) \\
&= g_{(\pi|_{U_i})^{-1}(\tilde{q})}\left((d\pi_{(\pi|_{U_i})^{-1}(\tilde{q})})^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(\tilde{q})\right), (\pi|_{U_i})^{-1}(\tilde{q})\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(\tilde{q})\right)\right) \\
&= g_{(\pi|_{U_i})^{-1}(\tilde{q})}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\left((\pi|_{U_i})^{-1}(\tilde{q})\right), \frac{\partial}{\partial y_l}\left((\pi|_{U_i})^{-1}(\tilde{q})\right)\right) \\
&= g_{kl}\left((\pi|_{U_i})^{-1}(\tilde{q})\right)
\end{aligned}$$

für alle $j, k = 1, \ldots, n$ und alle $\tilde{q} \in \pi(U_i)$, also ist $\tilde{g}_{kl} = g_{kl} \circ (\pi|_{U_i})^{-1}$ für alle $j, k = 1, \ldots, n$ und daher als Verknüpfung differenzierbarer Abbildungen differenzierbar.

3. Es sei $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ versehen mit der Lorentz-Metrik

$$g_{(x,y)}((v_1, v_2), (w_1, w_2)) := \frac{2(v_1 w_2 + v_2 w_1)}{x^2 + y^2}$$

für $(x, y) \in M$, $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in T_{(x,y)}M = \mathbb{R}^2$.

Zeigen Sie, dass $f : M \to M$, $f(x, y) = 2(x, y)$ eine Isometrie von (M, g) ist, dass $\Gamma := \{f^n | n \in \mathbb{Z}\}$ auf M eigentlich und frei agiert und dass M/Γ diffeomorph zu T^2 ist. Versehen sie dann M/Γ mit der eindeutigen pseudo-riemannschen Metrik $\tilde{g}$, die die natürliche Projektion $\pi : M \to M/\Gamma$ zu einer pseudo-riemannschen Überlagerung macht und zeigen Sie, dass $(M/\Gamma, \tilde{g}) = (T^2, \tilde{g})$ („Clifton-Pohl-Torus“) eine Geodätische besitzt, deren maximales Existenzintervall nicht ganz $\mathbb{R}$ ist.

Lösung:

f ist eine Isometrie von (M, g), da offensichtlich f ein Diffeomorphismus ist, weiter $df_{(x,y)}(v_1, v_2) = 2(v_1, v_2)$ für alle $(x, y) \in M$ und alle $(v_1, v_2) \in T_{(x,y)}M = \mathbb{R}^2$ gilt und somit

$$\begin{aligned}
(f^*g)_{(x,y)}((v_1, v_2), (w_1, w_2)) &= g_{f(x,y)}(df_{(x,y)}(v_1, v_2), df_{(x,y)}(w_1, w_2)) \\
&= 4\, g_{(2x,2y)}((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = 4\, \frac{2(v_1 w_2 + v_2 w_1)}{(2x)^2 + (2y)^2} \\
&= 4\, \frac{2(v_1 w_2 + v_2 w_1)}{4(x^2 + y^2)} = \frac{2(v_1 w_2 + v_2 w_1)}{x^2 + y^2} \\
&= g_{(x,y)}((v_1, v_2), (w_1, w_2))
\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in M$ und alle $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in T_{(x,y)}M = \mathbb{R}^2$ gilt.

Offensichtlich wirkt $\Gamma = \{f^n | n \in \mathbb{Z}\}$ frei auf M. Zum Nachweis der Eigentlichkeit der Wirkung von Γ auf M sei ein Kompaktum $K \subseteq M \times M$ gegeben. Weiter sei $P : \Gamma \times M \to M \times M$, $P(g, p) := (g(p), p)$ für $(g, p) \in \Gamma \times M$. Wir müssen zeigen, dass $P^{-1}(K)$ kompakt ist. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $K = K_1 \times K_2$ mit kompakten Teilmengen $K_1, K_2 \subseteq M$ von M ist (es ist $K \subseteq \pi_1(K) \times \pi_2(K)$ mit

π_1, π_2 die Projektion auf die erste bzw. zweite Komponente von $M \times M$. Ist dann $P^{-1}(\pi_1(K) \times \pi_2(K))$ kompakt, so ist auch $P^{-1}(K)$ als abgeschlossene Teilmenge dieser Menge kompakt).

Dann ist $P^{-1}(K_1 \times K_2) = \{g \in \Gamma \,|\, g(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\} \times K_2$ und zum Nachweis der Kompaktheit von $P^{-1}(K_1 \times K_2)$ müssen wir also zeigen, dass $\{g \in \Gamma \,|\, g(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\} = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, f^n(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\}$ endlich ist.

Aufgrund der Kompaktheit von K_1 und K_2 gibt es nun aber positive reelle Zahlen $0 < r_1 < R_1$ und $0 < r_2 < R_2$ mit $r_1 \leq \|x| \leq R_1$ für alle $x \in K_1$ und $r_2 \leq \|y| \leq R_2$ für alle $y \in K_2$. Dazu gibt es ganze Zahlen N_1, N_2 mit $N_1 < N_2$ und $2^{N_1} < \frac{r_2}{R_1}$ sowie $2^{N_2} > \frac{R_2}{r_1}$. Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq N_1$ und $x \in K_1$ folgt daher

$$\|f^n(x)\| = \|2^n x\| = 2^n \|x\| \leq 2^{N_1} R_1 < r_2,$$

also, $f^n(x) \notin K_2$. Ebenso folgt für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq N_2$ und $x \in K_1$ dann

$$\|f^n(x)\| = 2^n \|x\| \geq 2^{N_2} r_1 < R_2,$$

also wieder $f^n(x) \notin K_2$. Daher ist $\{n \in \mathbb{Z} \,|\, f^n(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\} \subseteq \{N_1 + 1, \ldots, N_2 - 1\}$ und somit insbesondere endlich. Daher ist also die Wirkung von Γ auf M eigentlich. Somit ist nach

Somit ist nach Blatt 5, Aufgabe 1 M/Γ insbesondere eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir behaupten, dass ein Diffeomorphismus von M/Γ nach $T^2 = S^1 \times S^1$ durch

$$F : M/\Gamma \to T^2, \quad F(\Gamma \cdot (x, y)) := \left(e^{\frac{2\pi i}{\log(2)} \log(\|(x,y)\|)}, \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|} \right)$$

für $(x, y) \in M$ gegeben ist:

Zunächst rechnet man direkt nach, dass F wohldefiniert ist. Weiter ist F differenzierbar, da offensichtlich $F \circ \pi : M \to T^2$ differenzierbar ist und $\pi : M \to M/\Gamma$ ein lokaler Diffeomorphismus ist (ganz allgemein gilt deswegen für jede differenzierbare Überlagerungen $p : \tilde{M} \to M$, dass eine Abbildung $G : M \to N$ differenzierbar ist, genau dann, wenn $G \circ p : M \to N$ differenzierbar ist, wobei $\tilde{M}, M, N$ Mannigfaltigkeiten sind). Man rechnet leicht nach, dass die Umkehrabbildung von F durch

$$F^{-1} : T^2 \to M/\Gamma, \quad F^{-1}(e^{i\varphi}, w) := \Gamma \cdot (e^{\frac{\varphi \log(2)}{2\pi}} \cdot w)$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und $w \in S^1$ gegeben ist. Hierbei haben wir $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ identifiziert.

Diese Abbildung ist differenzierbar, da für jedes $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ die Abbildung $S^1 \setminus \{e^{i\varphi_0}\} \times S^1 \ni (z, w) \mapsto e^{\frac{\varphi \log(2)}{2\pi}} \cdot w \in M$ differenzierbar ist, wobei $\varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$ (!!!) eindeutig durch die Bedingung $z = e^{i\varphi}$ definiert ist („S^1 ohne einen Punkt ist diffeomorph zu einem Intervall“).

Schließlich müssen wir also noch eine Geodätische auf M/Γ finden, deren maximales Existenzintervall nicht $\mathbb{R}$ ist. Da π lokal ein Diffeomorphismus ist und $g = \pi^* \tilde{g}$ gilt, ist für jede Geodätische c von (M, g) nach Blatt 9, Aufgabe 2 (c) dann die Kurve $\pi \circ c$ eine Geodätische von $(M/\Gamma, \tilde{g})$ und umgekehrt kann man jede Geodätische $\tilde{c}$ von $(M/\Gamma, \tilde{g})$ lokal zu einer Geodätischen von (M, g) hochliften. Daher genügt es eine Geodätische auf (M, g) zu finden, die nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden kann. Dazu berechnen wir die Christoffelsymbole von (M, g) mit der Formel von Blatt 8, Aufgabe 2 bezüglich der Standardkarte (M, id_M) von M, $\mathrm{id}_M = (x_1, x_2)$:

Zunächst ist $g_{11}(x,y) = g_{22}(x,y) = 0$ und $g_{12}(x,y) = g_{21}(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2}$. Daraus folgt $g^{11}(x,y) = g^{22}(x,y) = 0$ sowie $g^{12}(x,y) = g^{21}(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$. Daher ist mit $x_1 = x$ und $x_2 = y$

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{11}(x,y) &= \tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{kl}(x,y)\left(\tfrac{\partial g_{1l}}{\partial x_1}(x,y) + \tfrac{\partial g_{1l}}{\partial x_1}(x,y) - \tfrac{\partial g_{11}}{\partial x_l}(x,y)\right) \\
&= \sum_{l=1}^{2} g^{kl}(x,y)\cdot \tfrac{\partial g_{1l}}{\partial x}(x,y) = g^{k2}(x,y)\cdot \tfrac{\partial g_{12}}{\partial x}(x,y) \\
&= \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{2}\cdot\left(-\frac{2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right) = -\frac{2x}{x^2+y^2} & \text{, falls } k=1, \\ 0 & \text{, falls } k=2. \end{cases}
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in M$. Da alles symmetrisch in x und y ist, bekommen wir genauso $\Gamma^1_{22}(x,y) = 0$ und $\Gamma^2_{22}(x,y) = -\frac{2y}{x^2+y^2}$ für alle $(x,y) \in M$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{12}(x,y) &= \tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{1l}(x,y)\left(\tfrac{\partial g_{2l}}{\partial x_1}(x,y) + \tfrac{\partial g_{1l}}{\partial x_2}(x,y) - \tfrac{\partial g_{12}}{\partial x_l}(x,y)\right) \\
&= g^{12}(x,y)\cdot\left(\tfrac{\partial g_{22}}{\partial x}(x,y) + \tfrac{\partial g_{12}}{\partial y}(x,y) - \tfrac{\partial g_{12}}{\partial y}(x,y)\right) = 0.
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in M$ und genauso erhalten wir $\Gamma^2_{12}(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in M$. Da die Christoffelsymbole in unserem Fall nach Bemerkung 2.18 symmetrisch in den unteren beiden Indizes sind, folgt $\Gamma^1_{21}(x,y) = \Gamma^2_{21}(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in M$. Eine differenzierbare Kurve $(x(t),y(t)) = (x_1(t),x_2(t))$ in M ist daher eine Geodätische genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
0 &= \ddot{x}_1(t) + \sum_{i,j=1}^{2} t\dot{x}_i(t)\cdot\dot{x}_j(t)\cdot\Gamma^1_{ij}((x(t),y(t))) = \ddot{x}(t) - \tfrac{2x(t)}{x(t)^2+y(t)^2}\cdot\dot{x}(t)^2, \\
0 &= \ddot{x}_2(t) + \sum_{i,j=1}^{2} t\dot{x}_i(t)\cdot\dot{x}_j(t)\cdot\Gamma^2_{ij}((x(t),y(t))) = \ddot{y}(t) - \tfrac{2y(t)}{x(t)^2+y(t)^2}\cdot\dot{y}(t)^2,
\end{aligned}$$

gilt. Man rechnet nun leicht nach, dass $(x(t),y(t)) := (\frac{1}{1-t},0)$ eine Lösung dieses Systems von Differentialgleichungen, also eine Geodätische von (M,g) ist, deren maximales Existenzintervall $(-\infty,1) \neq \mathbb{R}$ ist. Ebenso sieht man leicht, dass $(x(t),y(t)) := (\tan(t),1)$ eine Geodätische von (M,g) ist mit maximalem Existenzintervall $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \neq \mathbb{R}$.

4. Es sei (M,g) eine geodätisch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit und (N,h) eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit.

   Zeigen Sie, dass es keine echte offene Teilmenge U von N gibt, so dass (M,g) isometrisch zu $(U,h|_U)$ ist.

   Bemerkung: Zusammenhängende geodätische vollständige riemannsche Mannigfaltigkeiten können also nicht „zusammenhängend erweitert" werden.

   Lösung:

   Angenommen, $U \subsetneq N$ wäre eine solche offene Teilmenge von N. Dann ist der Rand ∂U von U in N nicht-leer (denn sonst wäre $\overline{U} = U \cup \partial U = U$ und somit U auch abgeschlossen, was aufgrund der Tatsache, dass N zusammenhängend ist und U eine echte Teilmenge von N ist einen Widerspruch darstellt). Sei also ein $p \in \partial U$ gegeben.

Dann ist $p \notin U$. Weiter können wir einen geodätischen Ball B um p in N wählen. Dann gibt es zu jedem $q \in B$ eine (bis auf affin-lineare Umparametrisierungen) eindeutige in B verlaufende Geodätische von q nach p. Da p im Rand von U ist, gibt es ein $q \in B \cap U$. Von diesem q aus betrachten wir die eindeutige Geodätische c von q nach p mit $c(0) = q$ und $c(1) = p$. Dann gibt es ein maximales $t_0 \in (0, 1]$ mit $c([0, t_0)) \subseteq U$. Sei nun $f : (M, g) \to (U, h|_U)$ eine Isometrie. Dann ist nach Blatt 9, Aufgabe 2 (c) die Kurve $f^{-1} \circ c : [0, t_0) \to M$ eine Geodätische von (M, g). Diese kann nicht über t_0 hinaus verlängert werden, da dies sonst bedeuten würde, dass man auch c über t_0 hinaus zu einer Geodätischen von $(U, h|_U)$ (!!!) verlängern könnte und somit insbesondere $c(t_0) \in U$ wäre, ein Widerspruch zur Definition von $t_0 \in (0, 1]$. Daher ist (M, g) nicht geodätisch vollständig, ein Widerspruch zur Annahme. Daher kann es keine echte offene Teilmenge U von N geben, so dass (M, g) isometrisch zu $(U, h|_U)$ ist.