1. Konvexität in der absoluten Ebene

In einem Dreieck in der Euklidischen Ebene hat die Strecke zwischen zwei Seitenmittelpunkten die halbe Länge der dritten Seite. In der absoluten Ebene hat man eine Ungleichung:

SATZ 1.1. *Sei ΔABC ein Dreieck in der absoluten Ebene. Seien A', B' die Mittelpunkte von BC und AC. Dann gilt $2 \cdot A'B' \leq AB$.*

Beweis. Ist das Dreieck ausgeartet, so gilt die Gleichheit. Ist es nicht ausgeartet, so können wir $\measuredangle BCA > 0$ annehmen. Dann ist $\angle BA'A$ positiv und es gilt $\measuredangle BA'A \geq \measuredangle BCA + \measuredangle CAA'$.

Sei $M \in [A'B')$ mit $A'M = 2 \cdot A'B'$. Die Dreiecke $\Delta A'CB'$ und $\Delta MAB'$ sind kongruent. Also ist $\measuredangle MAB' = \measuredangle A'CB'$. Folglich

$$\measuredangle MAA' = \measuredangle MAB' + \measuredangle B'AA' = \measuredangle B'CA + \measuredangle CAA' \leq \angle BA'A$$

Nun sehen wir mit Proposition 10.7 aus dem Skript, dass $A'M \leq AB$ gelten muss.

□

Damit können wir folgern:

SATZ 1.2. *Seien A, B, C, D Punkte in der absoluten Ebene. Seien P, Q die Mittelpunkte der Strecken $[AB]$ und $[CD]$. Dann gilt $2 \cdot PQ \leq BC + AD$.*

Beweis. Sei M der Mittelpunkt von $[AC]$. Dann gilt $2 \cdot MP \leq BC$ und $2 \cdot MQ \leq AD$. □

Mit dem Kriterium für Konvexität stetiger Funktionen auf Intervallen schließen wir:

Korollar 1.3. *Seien $l_1 : \mathbb{R} \to E$ und $l_2 : \mathbb{R} \to E$ abstandserhaltende Parametrisierungen von Geraden. Seien a_1, a_2 zwei nicht-negative Zahlen. Dann ist die Funktion $t \to d(l_1(a_1 t), l_2(a_2 t))$ konvex.*

Dies kann man auch als Konvexität der Abstandsfunktion zu einer Geraden formulieren:

Definition 1.4. *Ist $S \subset E$ eine Teilemenge so ist die Abstandsfunktion $d_S : E \to \mathbb{R}$ zur Menge definiert als $d_S(P) = \inf\{Q \in S | PS\}$.*

Die Abstandsfunktion d_l zu einer Geraden l ist gegeben durch $d_l(P) = PQ$, wobei Q der Fußpunkt von P auf l ist.

SATZ 1.5. *Für jede Gerade l ist die Abstandsfunktion $d_l : E \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion im folgenden Sinn: Für jede abstandserhaltende*

Parametrisierung $m : \mathbb{R} \to E$ einer Gerade gilt $t \to d_l(m(t))$ ist konvex. Mit anderen Worten, $2 \cdot d_l(M) \leq d_l(A) + d_l(B)$ für alle $A, B \in E$ und ihren Mittelpunkt M.

Beweis. Seien $A, B \in E$ und sei M ihr Mittelpunkt. und sind P, Q Fußpunkte von A, B auf l uns sei $N \in l$ ihr Mittelpunkt. Dann gilt

$$d_l(M) \leq MN \leq \frac{1}{2}(AP + BQ) = \frac{1}{2}(d_l(A) + d_l(B)$$

□

2. Asymptotische Strahlen

Eine konvexe Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ist entweder monoton fallend oder es gilt $\lim_{t \to \infty} f(t) = \infty$. Aus Korollar 1.3 und Satz 1.5 erhalten wir direkt:

SATZ 2.1. *Seien $s_{1,2} : [0, \infty) \to E$ zwei Strahlen. Dann gilt entweder $\lim_{t \to \infty} d(s_1(t), s_2(t)) = \infty$, oder $t \to d(s_1(t), s_2(t))$ ist monoton fallend.*

Definition 2.2. *Zwei Strahlen $s_1, s_2 : [0, \infty) \to E$ heißen asymptotisch, wenn $d(s_1(t), s_2(t))$ durch eine Konstante von oben beschränkt ist. Wir schreiben $s_1 ||| s_2$*

Satz 2.1 zeigt, dass zwei Strahlen asymptotisch sind genau dann, wenn $d(l_1(t), l_2(t)) \leq d(l_1(0), l_2(0))$ für alle t gilt. Zwei Strahlen, die in einem Punkt starten sind asymptotisch genau dann, wenn sie gleich sind. Zwei Strahlen, die in einer Geraden liegen sind genau dann asymptotisch, wenn sie in die gleiche Richtung zeigen, d.h., wenn einer der beiden Strahlen in dem anderen enthalten ist.

Aus der Dreiecksungleichung folgern wir, dass "asymptotisch" eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Strahlen ist.

Lemma 2.3. *Sind zwei Strahlen s_1, s_2 asympotitsch, so sind die beiden sie enthaltenden Geraden $l_{1,2}$ parallel.*

Beweis. Sei $A \in l_1 \cap l_2$ und sei s'_i der in l_i enthaltene zu s_i asymptotitsche Strahl. Dann sind s'_1 und s'_2 asymptotisch. Also $d(s'_1(t)), s'_2(t)) \leq d(s'_1(0), s'_2(0)) = 0$. Also stimmen l_1 und l_2 überein. □

Ist E eine Euklidische Ebene (und nur dann, wie wir sehen werden!), so gilt auch die "Umkehrung". Ist s_1 ein in l_1 enthaltener Strahl und ist l_2 parallel zu l_1, so enthält l_2 einen zu s_1 asymptotischen Strahl.

Lemma 2.4. *Sei l eine Gerade und $s : [0, \infty) \to E$ ein Strahl in E. Der Strahl s ist asymptotisch zu einem in l enthaltenen Strahl genau* *dann, wenn $t \to d_l(s(t))$ beschränkt ist, d.h., wenn es ein $\lambda > 0$ gibt, so dass jeder Punkt von s Abstand $\leq \lambda$ von l hat.*

Beweis. Ist s asymptotisch zu $s_1 \subset l$, so hat jeder Punkt auf s beschränkten Abstand zu einem Punkt auf s_1 also auch zu l.

Sei andererseits $t \to d_l(s(t))$ von oben beschränkt durch $\lambda > 0$. Sei P der Anfangspunkt von s, sei M der Fußpunkt von P auf l. Für $t \geq 0$ sei $S_t = s(t)$ und N_t der Fußpunkt von S_t auf l. Dann liegen S_t und N_t in einer (MP)-Halbebene.

Ferner gilt $t - 2\lambda < MN_t \leq 2\lambda + t$. Ist also s_1 der Teilstrahl von l, der in M startet und ein (und damit alle) N_t enthält, so gilt für alle $t > 0$

$$d(s(t), s_1(t)) \leq 3\lambda$$

Damit sind s und s_1 asymptotisch. □

3. Paralellitätswinkel

Lemma 3.1. *Sei P ein Punkt in der absoluten Ebene E, l eine Gerade mit $P \notin l$ und M der Fußpunkt von P auf l. Dann ist das Bild der Abbildung $Q \in l \to \measuredangle MPQ$ ein Intervall $(-\phi, \phi)$, wobei $0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Der Winkel ϕ hängt nur von $PM = d_l(P)$ ab.*

Proof. Wir haben in früheren Vorlesungen gesehen, dass das Bild der Abbildung $Q \to \measuredangle MPQ$ ein Intervall ist. Da l von der Spiegelung an (MP) in sich abgebildet wird, ist das Intervall symmetrisch um 0. Letztlich ist $\frac{\pi}{2}$ nicht im Bild, da die Gerade (PX), für die $\measuredangle MPX = \frac{\pi}{2}$ gilt, zu l parallel ist.

Die letzte Behauptung ergibt sich aus der Invarianz der Winkel, Abstände und Fußpunkte unter Bewegungen, und der Tatsache dass für andere P', l' mit $d_{l'}(P') = d_l(P)$ eine Bewegung existiert, die P auf P' und l auf l' schickt. □

Ist der Winkel ϕ wie oben, so sind alle Geraden (PX) mit $\phi \leq \measuredangle MPX \leq \frac{\pi}{2}$ parallel zu l. Insbesondere gibt es genau eine zu l parallele Gerade durch P, wenn $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Der Winkel $\phi = \phi(d_l(P))$ heißt der (durch $d_l(P)$ bestimmte) *Parallelitätswinkel.*

SATZ 3.2. *Sei l eine Gerade, $P \notin l$ und M der Fußpunkt von P auf l. Sei $N \in l$ so dass $\measuredangle QMN = \frac{\pi}{2}$. Sei $\phi = \phi(PM)$ der Parallelittswinkel. Gilt $\measuredangle MPX = \phi$, so sind $[PX)$ und $[MN)$ asymptotisch.*

Beweis. Nach Definition von ϕ, schneidet der Strahl $[PX)$ die Gerade l nicht. Andererseits, für jedes $\phi > \epsilon > 0$ gibt es einen eindeutigen

Punkt $X_\epsilon \in [PN)$, so dass $\measuredangle MX_\epsilon P = \phi - \epsilon$ gilt. Und wir haben $\lim_{\epsilon\to 0} MX_\epsilon = \infty$.

Wegen der Konvexität von d_l, gilt $d_l(Y) \le d_l(P) = PM$ für jedes ϵ und jedes $Y \in [PX_\epsilon]$, da $d_l(X_\epsilon) = 0$.

Wähle nun $t > 0$. Für $\epsilon > 0$ klein genug, gilt $PX_\epsilon > t$. Also gibt es genau einen Punkt $Y_{\epsilon,t} \in [PX_\epsilon]$ mit $PY_{\epsilon,t} = t$. Die Punkte $Y_{\epsilon,t}$ konvergieren gegen den Punkt $Y_t \in [PX)$ mit $PY_t = t$.

Wegen der Stetigkeit der Abstandsfunktion $d_l : E \to \mathbb{R}$ gilt also $d_l(Y_t) \le PM$. Aus Lemma 2.4 folgern wir dass $[PX)$ asymptotisch ist zu einem der beiden Strahlen, die in M starten und in l enthalten sind. Man sieht nun leicht, dass es nur der Strahl $[MN)$, der mit $[PX)$ in einer Halbebene bezüglich l liegt. $\square$

Zusammen mit früheren Sätzen erhalten wir:

Korollar 3.3. *Ist s ein Strahl in E und P ein Punkt in E, so gibt es genau einen Strahl, der in P startet und zu s asymptotisch ist.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass zwei asymptotitsche Strahlen die in P starten in parallelen Geraden liegen müssen.

Die Existenz erhalten wir mit dem vorherigen Satz. $\square$

SATZ 3.4. *Die Abbildung $\phi : (0,\infty) \to (0, \frac{\pi}{2}]$ ist monoton fallend und stetig. Es gilt $\lim_{t\to 0} \phi(t) = \frac{\pi}{2}$.*

Beweis. Sei l eine Gerade, P sei ein Punkt nicht in l. Sei M der Fußpunkt von P auf l. Sei $t = PM$ und sei $P' \in [MP)$ mit $MP' = t' > t$.

Sei $[PX)$ der zu $[MN) \subset l$ asymptotische Strahl mit $\measuredangle MPX == \phi(t)$. Betrachte den Strahl $[P'X')$ mit $\measuredangle MP'X' = \phi(t)$. Dann ist $(P'X')||(PX)$.

Also ist $(P'X')$ in einer Halbebene bezüglich (PX) enthalten. Also liegen $(P'X')$ und l in verschiedenen Halbebenen bezüglich (PX). Also sind sie parallel.

Folglich liegt $\phi(t)$ nicht im Intervall $(-\phi(t'), \phi(t'))$. Also ist die Funktion $t \to \phi(t)$ monoton fallend.

Sei nun N ein Punkt auf l, so dass $\measuredangle NMP = \frac{\pi}{2}$. Für $P_t \in [MP]$ mit $MP_t = t$, gilt $\lim_{t\to 0} \measuredangle NP_tP \to \frac{\pi}{2}$. Also $\lim_{t\to 0} \measuredangle MP_tN \to \frac{\pi}{2}$. Daraus folgt $\lim_{t\to 0} \phi(t) = \frac{\pi}{2}$.

Die Stetigkeit von ϕ zeigt man wie im letzten Argument. $\square$

Lemma 3.5. *Bezeichne $\phi(t)$ wieder den Parallelitätswinkel abhängig vom Abstand t. Gilt $\phi(t) = \frac{\pi}{2}$ für ein $t \in (0,\infty)$, so ist $\phi(t) = \frac{\pi}{2}$ für alle $t \in (0,\infty)$.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus der Monotonie von ϕ, wenn wir zeigen können, dass aus $\phi(t_0) = \frac{\pi}{2}$ die Gleichheit $\phi(2t_0) = \frac{\pi}{2}$ folgt.

Um diese Gleichheit zu beweisen, betrachte Gerade l, $P \notin l$, und den Fußpunkt M von P auf l, so dass $PM = t_0$. Sei P' der Punkt auf dem Strahl $[MP)$ mit $MP' = 2t_0$.

Da $\phi(t_0) = \frac{\pi}{2}$ gibt es genau eine zu l parallele Gerade (PX) durch P. Diese Gerade (PX) ist senkrecht auf (MP) und der Strahl $[PX)$ ist asymptotisch zu einem Strahl $[MN) \subset l$.

Sei $[P'X')$ der zu $[MN)$ asymptotische Strahl. Ist $\phi(2t_0) < \frac{\pi}{2}$, so ist $\measuredangle MP'X' = \measuredangle PP'X' < \frac{\pi}{2}$. Da $PP' = t_0$ und $\phi(t_0) = \frac{\pi}{2}$, folgt aber daraus sich $[P'X')$ und (PX) schneiden. Also ist $[P'X')$ nicht asymptotisch zu $[PX)$. Dann ist $[P'X')$ auch nicht asymptotisch zu $[MN)$, im Widerpsrich zu unserer Annahme. □

4. Charakterisierung der Euklidischen Ebene

SATZ 4.1. *Sei E eine absolute Ebene. Dann sind äquivalent:*

1. *E ist eine Euklidische Ebene.*
2. *Durch jeden Punkt P außerhalb der Geraden l gibt es genau eine zu l parallele Gerade durch P.*
3. *Es gibt einen Punkt P außerhalb der Geraden l, so dass es durch P genau eine zu l parallele Gerade gibt.*
4. *Jedes Dreieck hat Defekt 0.*
5. *Es gibt ein nicht-ausgeartetes Dreieck mit Defekt 0.*

Beweis. Wir haben bereits bewiesen, dass aus (1) die Bedingungen (2)-(5) folgen. Die Bedingung (3) ist äquivalent zur Aussage, dass es ein $t_0 > 0$ gibt, mit $\phi(t_0) = \frac{\pi}{2}$. Die Bedingung (2) ist äquivalent zu der Aussage, dass $\phi(t) = \frac{\pi}{2}$ für alle $t \in (0, \infty)$. Die Äquivalenz von (2) und (3) wurde also in Lemma 3.5 bewiesen.

Natürlich folgt (5) aus (4). Es bleibt zu zeigen, dass aus (5) die Bedingung (3) und aus (2) die Bedingung (1) folgt.

Sei also (5) erfüllt. Sei ΔABC ein Dreieck mit Defekt 0. Zerlegen wir das Dreieck durch eine Höhe in 2 Dreiecke, so finden wir ein rechtwinkliges Dreieck mit Defekt 0. Wir dürfen also $\measuredangle ABC = \frac{\pi}{2}$ annehmen. Betrachte das Bild, das im Beweis des Theorems 10.8 aus dem Skript verwendet wurde. Da der Defekt verschwindet, ist in dem Bild $\delta = \gamma$ und der Strahl $[C_1C_2)$ enthält die Punkte $C_3, ..., C_n, ...$ Da dieser Strahl in endlichem Abstand zu $(BA) = (A_0A_1)$ liegt, ist der Strahl asymptotisch zu $[BA)$. Nun gilt aber $\measuredangle A_0C_1C_2 = \alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Also gilt $\phi(t_0) = \frac{\pi}{2}$, wobei $t_0 = BC$.

Sei (2) erfüllt. Wir wollen zeigen, dass Axiom IV erfüllt ist. Zunächst sehen wir die Gleichheit der Wechselwinkel an Parallelen (wegen der Eindeutigkeit und Aufgabe 34). Genauso wie wir es vorher für die Euklidische Ebene bewiesen haben, folgt die Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten in einem Parallelogramm und die Aussage, dass der Defekt jedes Dreiecks 0 ist.

Für $k = 2$ folgt Axiom IV nun wie im Beweis von Satz 1.1, wenn man $\leq$ durch $=$ ersetzt (die die Winkel betreffende Ungleichung kam vom Defekt des Dreiecks).

Sei $b = AC$, $c = AB$. Seien $s_{1,2} : [0, \infty) \to E$ abstandserhaltende Parametrisierungen der Strahlen $[AB)$ und $[AC)$. Die Funktion $f(t) = d(s_1(c \cdot t), s_2(b \cdot t))$ ist konvex. Benutzt man Axiom IV für $k = 2$, so folgt

$$f(\frac{t}{2}) = \frac{1}{2} f(t) = \frac{1}{2}(f(0) + f(t))$$

Also gilt $f(k \cdot t) = k \cdot f(t)$ für alle $k > 0$ und alle t. Damit haben wir in Axiom IV bereits $B'C' = k \cdot BC$ gezeigt.

Aus der Kongruenzbedingung (SSS) folgt nun, dass zwei Dreiecke ΔABC und $\Delta A''B''C''$ für die $A''B'' = k \cdot AB, B''C'' = k \cdot BC, C''A'' = k \cdot CA$ gilt, die Gleichheit $\measuredangle CAB = \pm\measuredangle C''A''B''$ gelten muss.

Vertauscht man die Rollen von A, B, C, so ergibt sich die Aussage über die Gleichheit der Winkel. $\square$