Prof. Dr. Peter Littelmann
Christian Steinert

Übungen zu Newton-Okounkov Theorie

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(i) Für je zwei abgeschlossene Teilmengen A und B in X mit $X = A \cup B$ gilt $A = X$ oder $B = X$.

(ii) Für je zwei nichtleere, offene Teilmengen U und V in X gilt $U \cap V \neq \emptyset$.

(iii) Für jede nichtleere, offene Teilmenge U in X gilt $X = \overline{U}$.

Definition 1. Sei $\mathfrak{v} : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \mapsto \mathbb{Z}^n$ eine Bewertung und $\leq$ eine Ordnung auf $\mathbb{Z}^n$. Zu jedem Tupel $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$ definieren wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{\mathbf{m}} &:= \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \mid \mathfrak{v}(f) \geq \mathbf{m}\}\,, \\
\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{>\mathbf{m}} &:= \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \mid \mathfrak{v}(f) > \mathbf{m}\} \text{ und} \\
\overline{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{\mathbf{m}}} &:= \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{\mathbf{m}} / \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{>\mathbf{m}},
\end{aligned}$$

wobei der Quotient als Quotient von Vektorräumen zu verstehen ist. Wir nennen $\overline{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{\mathbf{m}}}$ ein **Blatt** der Bewertung $\mathfrak{v}$.

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{v} : \mathbb{C}[x] \mapsto \mathbb{Z}$ definiert durch $\mathfrak{v}(\sum a_i x^i) := \min\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{v}$ eine Bewertung ist.

(ii) Geben Sie eine explizite Beschreibung von $\mathbb{C}[x]_m$ und $\mathbb{C}[x]_{>m}$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ an.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{v}$ ausschließlich eindimensionale Blätter hat.

Definition 2. Es sei $\leq$ eine totale Ordnung auf $\mathbb{Z}^n$ und $\min_{\leq}$ bezeichne das Minimum bezüglich dieser Ordnung auf $\mathbb{Z}^n$. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v}_{\leq} : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] &\to \mathbb{Z}^n \\
\sum a_{\mathbf{i}} \mathbf{x}^{\mathbf{i}} &\mapsto \min\nolimits_{\leq} \{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^n \mid a_{\mathbf{i}} \neq 0\}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Sei $\leq$ die homogen lexikographische Ordnung auf $\mathbb{Z}^n$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{v}_{\leq}$ eine Bewertung ist.

(ii) Finden Sie ein Polynom f, so dass die Bewertungen von f bezüglich der lexikographischen, rechts-lexikographischen, homogen lexikographischen und homogen rechts-lexikographischen Ordnung jeweils paarweise verscheiden sind.

(iii) Bestimmen Sie $\overline{\mathbb{C}[x, y]_{(1,0)}}$ bezüglich der vier Ordnungen aus (ii).

Aufgabe 4. Sei $X \subseteq \mathbb{C}^2$ die Kurve definiert durch

$$x^3 - 2x^2 + x = y^2.$$

(i) Bestimmen Sie die Degenerierung von X mit dem Verfahren aus der Vorlesung.

Hinweis: Sei $P(x,y)$ das definierende Polynom von X. Bestimmen Sie das Newton-Polygon von $P(x,y)$ – welches kein Punkt sein sollte – und betrachten Sie das Segment durch $(0,2)$. Der negative Kehrwert der Steigung dieses Segments sei $\mu = p/q$. Schreiben Sie anschließend $P(x,y) = P_1(x,y) + P_2(x,y) + \ldots + P_r(x,y)$ wobei $P_i(x,y) = \sum_{\alpha+\mu\beta=\eta_i} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta$ für bestimmte rationale Zahlen $\eta_i = p_i/q$ mit $\eta_1 < \ldots < \eta_r$. Bestimmen Sie dann das Polynom $\mathfrak{P}(x,y,t) = P_1(x,y) + P_2(x,y)t^{p_2-p_1} + \ldots + P_r(x,y)t^{p_r-p_1}$ und die zugehörige affine Varietät $X_t := \mathcal{V}(\mathfrak{P}(x,y,t))$.

(ii) Zeigen Sie explizit, dass $X_t \simeq X_1$ für alle $t \in \mathbb{C}^\times$.

(iii) Bestimmen Sie X_0. Zeigen oder widerlegen Sie: $X_0 \simeq X_1$.

Abgabe am 11. Juni in der Vorlesung.