Termin 09 – Lösungen/Ergebnisse

Themen:

Lineare Algebra – Inversenberechnung, Determinanten und Vollständige Induktion

(14 Aufgaben)

Aufgabe 1 (Inverse):

Die Matrix $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ sei die Inverse einer Matrix. Bestimmen Sie diese nach Gauß-Jordan und nach dem Satz über die Adjunkten.

Lösung:

Es gilt $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ und somit $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}$. Die gesuchte *inverse* Matrix von $\mathbf{B}$ bestimmen wir nach dem *Gauß-Jordan-Verfahren* wie folgt (→ FS: Kap. VII.1.5.2.2):

$$(\mathbf{B} \mid \mathbf{E}) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -9 \end{matrix}}_{\mathbf{B}} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \right.\right) \begin{matrix} \\ -2Z_1 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -9 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right.\right) \begin{matrix} \\ \\ -2Z_2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{matrix} \right.\right) \begin{matrix} -3Z_3 \\ +5Z_3 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \left| \underbrace{\begin{matrix} -11 & 6 & -3 \\ 18 & -9 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} \right.\right) = (\mathbf{E} \mid \mathbf{B}^{-1})$$

Damit gilt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -3 \\ 18 & -9 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

Für die Berechnung der Inversen mit der Adjunkten berechnen wir zuerst die Kofaktoren. Diese sind:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} = -11, \; C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 18, \; C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} = 6, \; C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -9, \; C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \; C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \; C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Wir berechnen die Determinante der zu invertierenden Matrix. Es ist $\det \underline{\underline{B}} = 1$. Nehmen wir nun die Transponierte der Kofaktormatrix und dividieren durch die Determinante, so erhalten wir

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -3 \\ 18 & -9 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (Orthonormiertes Vektorsystem):

Zeigen Sei, dass die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

ein orthonormiertes Vektorsystem bilden, die Matrix $\underline{\underline{A}}$ daher orthogonal ist. Bestimmen Sie die inverse Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ sowie die Determinante von $\underline{\underline{A}}$. Wie geht das mit der Inversen einfacher, als es explizit auszurechnen?

Lösung:

Spalten- und Zeilenvektoren sind normiert und paarweise orthogonal. Die Inverse ist die Transponierte. Die Determinante hat den Wert -1.

Aufgabe 3 (Orthogonale Matrix):

Vervollständigen Sie die folgende Matrix so, dass $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine orthogonale Matrix ist:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & * & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & * \\ * & 1/\sqrt{2} & * \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (Analytische Geometrie und Spiegelungen):

Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a. Diesem beschreiben wir eine Kugel ein, die alle sechs Seitenflächen des Würfels in genau einem Punkt berührt.

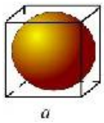

Abbildung 1: Einbeschriebene Kugel.

Nun umschreiben wir diesem Würfel zusätzlich eine „Umkugel" (siehe Abbildung 2).

Abbildung 2: Umkugel.

Der Mittelpunkt von Umkugel und Inkugel sei der Koordinatenursprung $O(0/0/0)$, die Kanten des Würfels seien parallel zu den entsprechenden Koordinatenachsen.

a) Stellen sie die Gleichungen der Ebenen auf, in denen die Seitenflächen des Würfels liegen. Berechnen Sie dann die Schnittkreisradien und Schnittkreismittelpunkte dieser Ebenen mit der Umkugel. Nutzen Sie dabei die Symmetrien aus!

Nun sei $x_2 = \frac{a}{2}$ die Ebene, an der der Mittelpunkt von In- und Umkugel gespiegelt wird.

b) Skizzieren Sie die Ebene für $a = 4$ in Abbildung 3. Wie lautet der Spiegelpunkt (ohne Rechnung, nur begründen!) in Abhängigkeit von a? Beschreiben Sie zusätzlich die Spiegelung f in Abhängigkeit von $a > 0$ (was ja klar ist!) durch die Funktionsgleichung $\vec{y} = \underline{\underline{M}} \cdot \vec{x} + \vec{b}$.

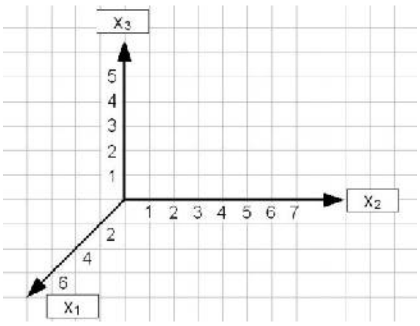

Abbildung 3: Koordinatensystem kartesischer Natur zum Skizzieren (Aufgabenteil b).

Lösung:

a) Es ist $x_i = \pm\frac{a}{2}$ mit $i \in \{1,2,3\}$. Schnittkreisradien sind alle gleich, $r_S = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Die Mittelpunkte befinden sich immer bei den Koordinaten $x_i = \pm\frac{a}{2}$ mit $i \in \{1,2,3\}$. Die anderen Koordinaten sind identisch Null.

b) Spiegelpunkt $O'(0/a/0)$. Es ist $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5 (Determinanten auf einen Blick):

Begründen Sie, warum die folgenden Determinanten verschwinden:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & -10 \\ 6 & -12 & 30 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -8 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & -6 & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -20 & 15 & -20 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Lösung:

a) Nullvektor b) proportionale Spalten c) vierte Zeile ist erste + zweite Zeile d) zwei identische Spalten

Aufgabe 6 (Determinanten):

Berechnen Sie die Determinante

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

a) nach der Sarrus-Regel,
b) durch die Laplace-Entwicklung nach einer günstigen Zeile oder Spalte,
c) durch Umwandlung in eine Dreiecksmatrix mittels elementarer Zeilenumformungen.

Lösung:

a) Nach der Sarrus-Regel gilt:

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 1\cdot 5 + 2\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot(-2)\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 5 - 4\cdot 0\cdot 0$$
$$= 20 - 1 + 20 = 39.$$

b) Wir entwickeln z.B. nach der dritten Spalte:

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 5 \cdot 8 = 39.$$

c) Wir berechnen die Determinante durch Umwandlung der ganzen Matrix in Dreiecksform.

$$\det \underline{\underline{A}} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & -19 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -39 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-39) = 39.$$

Aufgabe 7 (Laplace):

Berechnen Sie die folgende Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

a) durch Entwicklung nach einer günstigen Zeile.

b) durch Entwicklung nach einer günstigen Spalte.

Lösung:

a) Wir entwickeln nach der zweiten Zeile, da hier zwei Nullen und sonst nur ± 1 stehen.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 16 + 20 + 4 - 8 + 12 = 44.$$

b) Wir entwickeln nach der ersten Spalte, da hier wieder zwei Nullen stehen.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 4 + 20 - 8 + 16 = 44.$$

Aufgabe 8 (Gleichung und Determinante):

Welche Lösungen besitzt die folgende Gleichung?

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Lösung:

Wir berechnen zunächst die 3-reihige Determinante D nach der *Regel von Sarrus*:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{D} \begin{matrix} \lambda-1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 \\ -2 & 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$D = (\lambda-1)^2(1-\lambda) + 0 + 0 + 4(\lambda-1) + 0 + 0 = (\lambda-1)^2(1-\lambda) + 4(\lambda-1)$$

Die sich daraus ergebende kubische Gleichung lösen wir durch Ausklammern des gemeinsamen Faktors $\lambda - 1$ wie folgt:

$$(\lambda-1)^2 \underbrace{(1-\lambda)}_{-(\lambda-1)} + 4(\lambda-1) = -(\lambda-1)^3 + 4(\lambda-1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\lambda-1)^3 - 4(\lambda-1) = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2 - 4\right] = 0 \quad \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \\ (\lambda-1)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \end{cases}$$

$$(\lambda-1)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-1)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda - 1 = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \pm 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -1$$

Lösung: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$

Aufgabe 9 (Eine Gerade im neuen Gewand):

Zeigen Sie, dass durch die Gleichung $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ eine Gerade durch die Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$ dargestellt wird.

Lösung:

Lässt sich in Hauptform $ay + bx + c = 0$ umformen und beide Punkte liegen darauf (identische Spalten, Determinante verschwindet).

Aufgabe 10 (Determinanten und der Entwicklungssatz):

Berechnen Sie die Determinanten der beiden folgenden Matrizen:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$\det\left(\underline{\underline{A}}\right) = -45$, $\det\left(\underline{\underline{B}}\right) = 125$

Aufgabe 11 (Lustige Determinante):

Zeigen Sie (unter Angabe aller relevanten Argumente und Zwischenschritte), dass

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ & 0 & 3 & 3 & & 3 & 3 \\ \vdots & & 0 & 4 & & 4 & 4 \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & n-1 & \\ 0 & & \cdots & & & 0 & n \end{vmatrix} = n!.$$

Lösung:

Entwickeln nach der jeweils ersten Spalte liefert sofort das gewünschte Ergebnis.

Aufgabe 12 (Spiegelungen):

Es sei die Matrix $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{E}} - 2\vec{u}\vec{u}^T$ mit der 3-reihigen Einheitsmatrix $\underline{\underline{E}}$ und dem Spaltenvektor $\vec{u}$ mit $|\vec{u}| = 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\underline{\underline{S}}^T = \underline{\underline{S}}$, $\underline{\underline{S}}^2 = \underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{S}}\vec{u} = -\vec{u}$ und $\underline{\underline{S}}\vec{v} = \vec{v}$, wenn $\vec{v} \perp \vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht der Nullvektor ist.

Lösung:

z.B. $\underline{\underline{S}}^T = \left(\underline{\underline{E}} - 2\vec{u}\vec{u}^T\right)^T = \underline{\underline{E}}^T - 2\left(\vec{u}^T\right)^T \vec{u}^T = \underline{\underline{E}} - 2\vec{u}\vec{u}^T = \underline{\underline{S}}$.

Aufgabe 13 (Teilbarkeit):

Zeigen Sie, dass alle Folgenglieder b_n der Folge (b_n) mit

$$b_n = \frac{6^{2n+1}-1}{5} - 1 \text{ mit } n \in \mathbb{N}_{>0}$$

durch 7 teilbar sind.

Lösung:

Induktionsanfang:

Für $n=1$ ist $b_1 = \frac{6^3-1}{5} - 1 = \frac{215}{5} - 1 = 42$ und $42:7=6$. Damit liegt eine durch 7 teilbare Zahl vor. Der Induktionsanfang gelingt.

Induktionsschritt:

Wir gehen davon aus, dass für ein bestimmtes n die Teilbarkeit von b_n durch 7 gegeben ist, d.h.

$$\frac{\left(\frac{6^{2n+1}-1}{5} - 1\right)}{7} = k \text{, also } \frac{6^{2n+1}-1}{5} - 1 = 7k \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Nun überprüfen wir die Teilbarkeit für $n+1$. Es ist

$$\frac{6^{2\cdot(n+1)+1}-1}{5} - 1 = \frac{6^{2n+3}-1}{5} - 1 = \frac{36\cdot 6^{2n+1}-1}{5} - 1.$$

Wir versuchen, unser Wissen über b_n einzubauen:

$$\frac{36\cdot 6^{2n+1} - 1\overbrace{-35+35}^{=0}}{5} - 1 = \frac{36\cdot 6^{2n+1} - 36 + 35}{5} - 1 = 36\cdot\frac{6^{2n+1}-1}{5} + \frac{35}{5} - 1$$
$$= 36\cdot\frac{6^{2n+1}-1}{5} + \frac{35}{5} - 1\overbrace{-35+35}^{=0} = 36\cdot\frac{6^{2n+1}-1}{5} - 36 + 35 + \frac{35}{5} = 36\cdot\left(\frac{6^{2n+1}-1}{5} - 1\right) + 42$$
$$= 36\cdot 7k + 42 = 7\cdot(36k+6).$$

Also ist auch b_{n+1} durch 7 teilbar, weil es b_n ist.

Aufgabe 14 (Vollständige Induktion):

Beweisen Sie die gegebenen Behauptungen mittels vollständiger Induktion:

a) Es gilt, dass $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Es gilt, dass $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Der Ausdruck $n^3 - n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar.

d) Es gilt folgende Ungleichung: $2^n \geq n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösungen:

Induktionsanfang und Induktionsschluss gelingen für alle genannten Aufgaben. Interessant sind die Induktionsschritte, welche wir hier durchführen wollen:

a) Wir nehmen an, dass $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ für ein n gilt. Es gilt nun zu zeigen, dass

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1.$$

Wir verwenden die Annahme:

$$\left(2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n\right) + 2^{n+1} = \left(2^{n+1} - 1\right) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

Dies war einmal mehr zu zeigen.

b) Wir nehmen an, dass $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ für ein n gilt. Es gilt nun zu zeigen, dass

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Wir verwenden die Annahme:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}$$
$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+2} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Dies war zu zeigen.

c) Wir nehmen an, dass $n^3 - n$ für ein n durch 6 teilbar ist, d.h. $n^3 - n = 6k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt nun zu zeigen, dass

$$(n+1)^3 - (n+1) = 6m \text{ mit } m \in \mathbb{Z} \text{ gilt.}$$

Wir verwenden die Annahme:

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3n^2 + 3n = 6k + 3n \cdot (n+1).$$

Da $3n \cdot (n+1)$ eine gerade Zahl ist, weil entweder n oder $n+1$ eine ist, und den Faktor 3 enthält, ist der ganze Term durch 6 teilbar, womit $(n+1)^3 - (n+1)$ durch 6 teilbar ist. Dies war zu zeigen.

d) Wir nehmen an, dass $2^n \geq n+1$ für ein n gilt. Es gilt nun zu zeigen, dass

$$2^{n+1} \geq n+2\,.$$

Wir verwenden die Annahme:

$$2^n \geq n+1 \xrightarrow{\cdot 2} 2^{n+1} \geq 2n+2 \geq n+2 \text{ für } n \geq 0\,.$$

Dies war zu zeigen.