PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

SHAHID RAHMAN
PIERRE G. CHRISTEN

Hugh MacColls Begriff der hypothetischen Aussage und die Verflechtung der Tradition von Boethius und Hamilton mit Booles Algebraisierung der Logik

Philosophia Scientiæ, tome 2, nº 4 (1997), p. 95-138

<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1997__2_4_95_0>

Hugh MacColls Begriff der hypothetischen Aussage und die Verflechtung der Tradition von Boethius und Hamilton mit Booles Algebraisierung der Logik

Shahid Rahman und Pierre G. Christen

Fachrichtung Philosophie
Universität des Saarlandes - Saarbrücken

Philosophia Scientiae, 2 (4), 1997, 95-138

Shahid Rahman & Pierre G. Christen

Abstract: We will argue that Hugh MacColl's formulation of the conditional proposition should be interpreted in the context of his understanding of traditional hypotheticals as enunciated by Boethius and reformulated by Sir William Hamilton. In order to reflect the natural semantics and pragmatics of traditional hypotheticals the Boolean classical algebraic approach to hypotheticals should, according to MacColl, be replaced by a non-classical propositional approach.

Résumé: Nous allons montrer que la formulation de la proposition conditionelle par Hugh MacColl doit être interprétée dans le contexte de son interprétation du jugement hypothétique traditionel, qu'il a été énoncé par Boèce et reformulé par Sir William Hamilton. Selon MacColl, l'approche algébrique classique booléenne des jugements hypothétiques devrait être remplacée par une approche propositionnelle non-classique, afin de refléter la sémantique naturelle et la pragmatique du jugement hypothétique traditionnel.

Einleitung

Wie er selbst später berichtete, hatte Hugh MacColl (1837-1909), der Vater der formalen nicht-klassischen Logik, sein frühes formales System, das zwischen 1877 und 1893 in Form von Aufsätzen veröffentlicht wurde, die u.a. in den Zeitschriften *Educational Times*, *Proceedings of the London Mathematical Society* und *Mind* erschienen sind, ohne große Kenntnisse über das Werk von George Boole entwickelt[1]. MacColl sah sich aber nachträglich veranlaßt, die Grundideen seines Logikbegriffs im Verhältnis zum Logikbegriff Booles in einigen Aufsätzen zu verdeutlichen. MacColls Hauptkritik an Boole läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Die reine Logik ist als Hilfsmittel für die Praxis entstanden. Seltsamerweise entstammt dieser Praxisbezug ihrem abstrakten Charakter, der Verallgemeinerungen überhaupt erst möglich macht. Da die reine Logik abstrakt ist, stehen ihre kategorematischen Zeichen nicht für Gegenstände, weder für Zahlen noch für Klassen von Dingen oder Zeitzuständen, sondern für Aussagen (*statements, propositions*). Booles Logik, in der Aussagenoperationen in Klassenoperationen übersetzt werden, ist nicht allgemein genug und sollte durch einen *Calculus of*

[1] "The only book on logic that I possessed [in 1877] was Prof. Bain's work; and to this I turned. The resemblance which my method bore to Boole's, as therein described, of course struck me at once." [MacColl 1882, 243]

Equivalent Statements ersetzt werden, in dem Aussagenverknüpfungen anstelle von Booles Gleichungen auftreten [Vgl. z.B. MacColl 1877d, 9-20].

- Es könnte durchaus sein, daß für manche wissenschaftlichen Bereiche die bestehende Argumentationspraxis einen Typ von Logik erfordert, der in anderen Bereichen nicht anwendbar ist. Demnach sollte man beim Aufbau eines symbolischen Systems für die entsprechende Logik den Gebrauch der entsprechenden Ausdrücke (auch in der natürlichen Sprache) berücksichtigen. Nach MacColls Meinung läßt sich Booles Logik z.B. weder mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung noch mit dem Alltagsgebrauch in Einklang bringen, da sowohl die Wahrscheinlichkeitsrechnung als auch die natürliche Sprache ein starkes Wenn-Dann benötigen.[2]

In diesem Aufsatz sollen einige Konsequenzen dieser oben angeführten, sicherlich zu pauschal formulierten Kritik MacColls an Boole an Hand des Begriffs der hypothetischen Aussage untersucht werden. An dieser Stelle muß darauf hingewiesen werden, daß sich MacColls Kritik nicht in die Auseinandersetzung Formalismus versus Antiformalismus einordnen läßt. MacColl bezeichnete sich als Friedensstifter, der die philosophische Tradition der Logik mit den neuen Instrumenten der formalen Logik vereinigen wollte[3]. Dies gilt insbesondere bei der Formulierung des Wenn-Dann, das in MacColls System die Hauptverknüpfung bei hypothetischen Aussagen darstellt. Zur Frage, ob das intuitive Verständnis des Wenn-Dann in der Alltagssprache überhaupt formal darstellbar sei, meinte er, daß es eine formale Darstellung geben könne, und zwar eine, die mit der philosophischen Tradition, nicht jedoch mit der materialen Implikation übereinstimmt. MacColl glaubte, daß seine formale Fassung des Wenn-Dann, da sie gebrauchs- bzw. anwendungsnäher als die von Boole ist, eine Brücke zwischen

---

2 "I admit that in [applied] mathematics (the theory of probability excepted) the disjunctive may be considered equivalent to the conditional or implication [...]. But in the wider field of general logic the assumption is unsafe." [MacColl 1908b, 453]

3 "The writer of this paper would like to contribute his humble share as a peacemaker between the two sciences, both of which he profoundly respects and admires. He would deprecate all idea of aggression or conquest [...]. Do not Englishmen and Scotchmen alike now both 'glory' as George III said he did, 'in the name of Briton'? Why should not logicians and mathematicians unite in like manner under some common appellation?" [MacColl 1880b, 46-47]

Anhängern und Gegnern der Formalisierung bilden könne. Damit sind wir bei dem Hauptthema der nächsten Kapitel angelangt, in denen wir MacColls Aufbau des wichtigsten Pfeilers dieser Brücke rekonstruieren möchten.

I. Der traditionelle Begriff der *Hypotheticals*

MacColls erste Formulierungen des Wenn-Dann bedienen sich des Ausdrucks $A=AB$. Die bekanntesten und wahrscheinlich auch schwierigsten Stellen sind folgende:

> The equation A=AB asserts either that the statement A implies the statement B, or else that B is true necessarily. [MacColl 1877a, 91]

> Rule 2.- Let A be any statement whatever, and let B be any statement which is implied in A (and which must therefore be true when A is true, and false when A is false), or else let B be any statement which is admitted to be true independently of A; then (in either case) we have the equation A=AB. [MacColl 1877d, 10]

Die Gleichung $A=AB$, die von den Booleanern als Klassengleichung verstanden und als Ausdruck der Urteilsform A (nach dem Quadrat von Boethius) verwendet wurde, wird in MacColls logischem System, das in der Reihe von Aufsätzen *The Calculus of Equivalent Statements (and Integration Limits)* dargelegt wurde, in die junktorenlogische Äquivalenz $A \leftrightarrow (A \wedge B)$ transkribiert [Vgl. Rahman 1997b, Kapitel I.2.1.]. Aus MacColls Texten lassen sich zwei zu unterscheidende Lesarten herausarbeiten, wie diese Äquivalenz verstanden werden soll. Die Äquivalenz gilt im

1. Fall, wenn B wahr ist, A jedoch sowohl wahr als auch falsch sein kann. Dies bedeutet, daß die Wahrheit von B unabhängig von dem Wahrheitswert von A ist. Also ist B entweder eine formal wahre Aussage (Tautologie) oder eine faktisch (material) wahre Aussage. Kurz, wenn B^1 (d.h. wenn B wahr ist), dann entweder $A^1 \leftrightarrow (A^1 \wedge B^1)$ oder $A^0 \leftrightarrow (A^0 \wedge B^1)$.
2. Im zweiten Fall gibt es eine Verknüpfung, durch welche die Wahrheit bzw. Falschheit von A notwendigerweise die Wahrheit bzw. Falschheit von B bewirkt, und die MacColl mit dem Ausdruck '*is implied in*' artikuliert. Dies bedeutet erstens, daß A und B jeweils denselben Wahrheitswert erhalten und zweitens, daß sich der Wahrheitswert von B (notwendigerweise) nach dem Wahrheitswert von A richtet. Der Wahrheitswert von B soll also von dem Wahrheitswert von A abhängig sein. Wir nennen diese implikative Beziehung $A \rightarrow B$ in

Anlehnung an den stoischen Begriff συνάρτησις die *konnexe Verknüpfung*. Kurz, $A \Rightarrow B$ meint $A^1 \Rightarrow B^1$ bzw. $A^0 \Rightarrow B^0$, und deshalb $A^1 \leftrightarrow (A^1 \wedge B^1)$ bzw. $A^0 \leftrightarrow (A^0 \wedge B^0)$. Die konnexe Verknüpfung stellt offensichtlich keine materiale Implikation dar, denn die Wahrheitswertbedingungen dieser Verknüpfung schließen nicht den Fall ein, in dem A falsch und B wahr ist. Die konnexe Verknüpfung stellt auch kein Bikonditional dar, da B zwar von A abhängig ist, das Umgekehrte jedoch nicht unbedingt gelten muß.

Im zweiten Artikel des *Calculus of Equivalent Statements* ergänzt MacColl den ersten Fall. Die Implikation *Wenn A, dann B* und $A \leftrightarrow (A \wedge B)$ sollen nämlich äquivalent sein:

> Def. 12.- The symbol A:B (which may be called an implication) asserts that the statement A implies B; or that whenever A is true B is also true.
>
> Note.- It is evident that the implication A:B and the equation A=AB are equivalent statements (See Rule 2). [MacColl 1878a, 177]

Die Implikation muß hier klassisch gedacht werden. D.h., in unserem obigen Fall 1 muß noch die Möglichkeit ergänzt werden, daß sowohl A als auch B falsch sind: $A^0 \leftrightarrow (A^0 \wedge B^0)$. Daß diese Lesart gerechtfertigt ist, wird allerdings erst durch folgende Textstelle aus einem Anhang zum zweiten Aufsatz des *Calculus of Equivalent Statements* klar:

> Since α:β asserts that β is a factor [d.h. *ein Konjunkt*] of α [da $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \alpha)$], the implication α:0 asserts that α is false [d.h. $(\alpha{:}0)$ bzw. $(\alpha \rightarrow \beta^0) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta^0) \leftrightarrow \alpha^0)$], and the implication 1:α asserts that α is true [d.h. $(1{:}\alpha)$ *bzw.* $(\beta^1 \rightarrow \alpha) \leftrightarrow ((\beta^1 \wedge \alpha^1) \leftrightarrow \beta^1)$]; but the implications 0:α and α:1 make no assertion as to whether α is true or false [d.h. $(\beta^0 \rightarrow \alpha) \leftrightarrow ((\beta^0 \wedge \alpha^?) \leftrightarrow \beta^0)$ und $(\alpha \rightarrow \beta^1) \leftrightarrow ((\alpha^? \wedge \beta^1) \leftrightarrow \alpha^?)$]. [MacColl 1878a, 183]

Die angeführten Texte enthalten unserer Ansicht nach die wesentlichen Züge von MacColls Auffassung des Begriffes des *Hypothetical*, eine Auffassung, die die traditionalistische mit der formalen Definition der Booleaner vereint. Kurz, die Äquivalenz $A \leftrightarrow (A \wedge B)$ soll laut MacColl die allgemeine Form des Wenn-Dann darstellen, die sowohl die klassische Definition des Wenn-Dann als auch eine stärkere Fassung dieses Junktors einschließt, und damit eine neue Basis für die Definition des *Hypothetical* bildet. Wir werden jetzt, um die Pointe von MacColls Vorschlag sichtbar zu machen, zunächst die traditionalistische sowie die Boolesche Position bezüglich der *Hypotheticals* untersuchen.

I.A. Boethius und die traditionalistische Definition des *Hypothetical*

a) Boethius

Die Traditionalisten verstanden unter *Hypotheticals* die Urteile, bei denen die Wahrheit einer bestimmten Aussage in Abhängigkeit von irgendwelchen Voraussetzungen oder Bedingungen behauptet wird — im Gegensatz zu kategorischen Urteilen, die bedingungslos behauptet werden. Oder anders, *Hypotheticals* sind in der philosophischen Tradition vor Boole die Urteile, in denen das Zusprechen eines bestimmten Prädikators durch das Zusprechen eines anderen Prädikators bedingt wird. Die wichtigste Quelle für das 19. Jahrhundert ist anscheinend A. M. S. Boethius, der mit dem Begriff *hypothetica propositio* sowohl disjunktive als auch Wenn-Dann-Urteile bezeichnete:

> Jede hypothetische Aussage [...] kommt entweder durch (konditionalen) Zusammenhang *(connexionem)* [...] oder durch Disjunktion zustande [...]. Aber da, wie gesagt, die Konjunktion „si" und (die Konjunktion) „cum" dasselbe bedeuten, wenn sie in hypothetischen Aussagen vorkommen, können die konditionalen (Aussagen) in zweifacher Weise zustande kommen: entweder akzidentell, oder so, daß sie ein naturgemäßes Folgeverhältnis enthalten. Akzidentell (nämlich) so, daß wenn wir sagen: „Wenn das Feuer heiß ist, ist der Himmel rund" [...] (der Sinn ist:) „Zu der Zeit, da das Feuer heiß ist, zur selben Zeit ist (auch) der Himmel rund". Es gibt aber andere (Aussagen), welche unter sich ein naturgemäßes Folgeverhältnis haben [...] z.B. wenn wir sagen: „Wenn (cum) Mensch ist, ist Lebewesen".[4]

Es gibt also laut Boethius zwei Typen von hypothetischen Aussagen:

---

[4] Die Übersetzung stammt von Bochenski 1956, Text 24.10, 158. Der Originaltext lautet:
«Omnis igitur hypothetica propositio vel per conexionem fit [...], vel per disiunctionem [...]. Sed quoniam dictum est idem significare <si> *coniuctionem* et <cum>, quando in hypotheticis propositionibus ponitur, duobus modis conditionales fiere possunt: uno secundum accidens, altero ut habeant aliquam naturae consequentiam. Secundum accidens hoc modo, ut cum dicimus: <ignis calidus sit, coelum rotundum est> [...] id haec propositio designat, quia quo tempore ignis calidus est, eodem tempore coelum quoque rotundum est. Sunt autem aliae quae habent ad se consequentiam naturae [...], uta ita dicamus <cum homo sit, animal est>». [Boethius 1969, Buch I, Kapitel iii, Paragraphen 4-7, S. 216-220]

i) zusammenhängende oder konditionale Aussagen, und

ii) disjunktive Aussagen.

In bezug auf den konditionalen Zusammenhang unterscheidet er wiederum zwei Fälle:

- *secundum accidens*: Es wird nur ein zeitlicher Zusammenhang ausgedrückt, z.B. *Wenn das Feuer heiß ist, ist der Himmel rund.*
- *secundum naturam*: Es wird ein starker inhaltlicher Zusammenhang (*connexio*) ausdrückt.

Bei den Aussagen *secundum naturam* wird nochmals unterschieden zwischen denjenigen,

- in denen der starke (inhaltliche) Zusammenhang durch den Vordersatz, der eine Ursache darstellt, gegeben wird, und somit die Reihenfolge der einfachen Aussagen (<Vordersatz, Hintersatz>) festgelegt ist (*connexae propositiones secundum naturam per terminorum positionem)*, und denjenigen,
- in denen die Reihenfolge der einfachen Aussagen trotz ihres starken inhaltlichen Zusammenhangs nicht mit der Ordnung Ursache-Wirkung übereinstimmt. So kann man z.B. bei der Aussage *Wenn es Mensch ist, dann ist es Tier* nicht den Vordersatz mit der Ursache identifizieren. Wenn in diesem Beispiel eine Ursache vorkommt, dann eher im Nachsatz, wo die Gattung 'Tier' zu finden ist: *Es ist Mensch, weil es Tier ist.*[5]

Die *connexae propositiones secundum naturam*, in denen die Reihenfolge der einfachen Aussagen von Belang ist, können wir mit Recht als Implikationen deuten, und als solche wurden sie im 19. Jahrhundert auch aufgefaßt. Wir müssen allerdings einräumen, daß der Begriff der konditionalen Aussage, in der die Reihenfolge der einfachen Aussagen nicht von Belang ist, ziemlich undurchsichtig ist. Diese Art von Aussagen wurde im 19. Jahrhundert nicht mehr gesondert behandelt, und wir werden sie daher vernachlässigen[6].

---

[5] Vgl. [Boethius 1969, Buch I, Kapitel iii, Paragraphen 4-7, S. 218 und 220]. Hier muß angemerkt werden, daß der Tradition nach die Gattung die Ursache einer Art darstellen kann. So kann in unserem Beispiel die Gattung 'Tier' eine Ursache darstellen, weil, wenn etwas kein Tier ist, es auch kein Mensch sein kann.

[6] Wir vermuten folgendes: Angenommen, der starke Zusammenhang einer *propositio secundum naturam* soll vom Vordersatz ausgehen, dann können

Nun soll der Begriff des starken Zusammenhangs erläutert werden. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel:

> Si est *a*, cum sit *b*, est c [...]
> atqui cum sit *b* non est *c*
> non est igitur *a*
> [Boethius 1969, Buch II, Kapitel vi, Paragraph 1. Zeilen 1-3, 286]

D.h.:

Wenn *A* ist, so ist, falls *B* ist, *C*: $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
(und) falls *B* ist, so ist *C* nicht: $B \rightarrow \neg C$

Also ist *A* nicht: $\neg A$

Wenn man bedenkt, daß Boethius die Implikation $B \rightarrow \neg C$ als die Verneinung von $B \rightarrow C$ ansah [Boethius 1969, Buch II, Kapitel i, Paragraph 7. Zeilen 66-72, 258-260], dann kann man ihm folgende Begründung des obigen Syllogismus unterstellen: $B \rightarrow C$ und $B \rightarrow \neg C$ sind unverträglich, denn, wenn *B* nach $B \rightarrow C$ mit $\neg C$ unverträglich ist (d.h. wenn es unmöglich ist, daß *B* und *nicht-C*), dann kann *B* nicht gleichzeitig mit $\neg\neg C$ unverträglich sein. Aber gerade die Unverträglichkeit von *B* mit $\neg\neg C$ folgt aus dem starken Zusammenhang zwischen *B* und *nicht-C*, wonach es unmöglich ist, daß *B* und *nicht-nicht-C*. Die Implikationen $B \rightarrow C$ und $B \rightarrow \neg C$ sind also unverträglich — genauer: eine ist die (starke) Verneinung der anderen — und deswegen kann man mit $B \rightarrow \neg C$ den modus tollens auf die erste Zeile des Syllogismus anwenden und dadurch auf $\neg A$ schließen. Die Aussagen $\neg(A \rightarrow \neg A)$ und $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$ werden wir demnach und in Anlehnung an Storrs McCall die erste und die zweite *boethianische These der Konnexität* nennen [Vgl. McCall 1966, 415].

Diese Interpretation des starken Zusammenhangs beruht offensichtlich auf den stoischen Begriffen des Zusammenhangs (*συναρτησις*) und der Unverträglichkeit (*μαχητης*)[7], die man bei

---

solche Konditionale, in denen dies nicht der Fall ist, durch Umkehrung der einfachen Aussagen in eine Form gebracht werden, die mit der Reihenfolge Ursache-Wirkung übereinstimmt. Nur die ursprüngliche Reihenfolge ist es also, die nicht von Belang ist.

7 Eine derartige Definition des Zusammenhangs, die des öfteren Chrysipp zugeschrieben wurde, hat Sextus Empiricus überliefert:
„[...] ist dieser (Satz) wahr: 'Wenn es keine unteilbaren Elemente der Seienden gibt, dann gibt es unteilbare Elemente der Seienden' [...]. Jene aber, welche die Konnexität (συναρτησιν) einführen, sagen, der zusammenhängende (Satz) sei richtig, wenn der kontradiktorische Gegensatz (αντικειμενον) seines Nachsatzes mit seinem Vordersatz unverträglich sei (μαχηται). Nach ihnen

Boethius durchaus unterstellen darf. William und Martha Kneale haben in ihrem berühmten Buch über die Geschichte der Logik stoische Einflüsse bei Boethius abgestritten, mit dem Resultat, daß sie das oben angeführte Beispiel als einen Fehler von Boethius ansehen mußten. [Vgl. Kneale/Kneale 1962, 191] Ähnlich wie die Kneales auf Boethius reagierten Jan Lukasiewicz [Vgl. Lukasiewicz 1951, 50] und Günther Patzig [Vgl. Patzig 1969, 200-207] auf Aristoteles, der im zweiten Buch 57a36-b18 der *Analytica Priora* die Aussage $\neg(\neg A \rightarrow A)$ als These verwendet[8]. Diese aristotelische Implikation besagt der stoischen Lesart nach, daß *nicht-A* mit *nicht-A* unverträglich ist, was ein guter Grund dafür ist, die Implikation $(\neg A \rightarrow A)$ abzulehnen. Daraus folgt, daß wenn $\neg B$ mit A unverträglich ist (wie in $A \rightarrow B$), es nicht gleichzeitig im selben Sinn mit *nicht-A* unverträglich sein kann (wie in $\neg A \rightarrow B$). Also müssen

---

sind nun die genannten zusammenhängenden (Sätze) unrichtig (μοχθηρα), der folgende aber wahr (αληθες): 'Wenn es Tag ist, ist es Tag'".
(Die Übersetzung stammt von [Bochenski 1956, Text 20.09, S. 136]. Siehe Sextus *Empiricus, Pyrrhoneiae Hypotyposes*, B-II-111)
Hier wird behauptet, daß die starke Implikation $(A \rightarrow B)$ folgendes ausdrückt: Es ist nicht der Fall, daß A und *nicht-B*, d.h. A und *nicht-B* sollen unverträglich sein bzw. eine Inkonsistenz bilden.

8 "Man sieht also: wenn der Schlußsatz falsch ist, sind die Prinzipien des Schlusses notwendig entweder alle oder teilweise falsch; ist er aber wahr, so ist weder eine Prämisse, noch sind alle notwendig wahr, sondern es ist möglich, daß wenn keine Prämisse in dem Schluß wahr ist, die Konklusion es gleichwohl ist, freilich nicht mit Notwendigkeit. Davon ist der Grund, daß wenn sich zwei Dinge zueinander so verhalten, daß wenn das eine ist, notwendig das andere ist, wenn dieses letztere nicht ist, auch das andere nicht sein kann, wenn es aber ist, nicht notwendig das andere ist. Daß aber, wenn und weil dasselbe ist und nicht ist, mit Notwendigkeit dasselbe ist, ist unmöglich, ich meine, daß z.B. wenn A weiß ist, B notwendig groß ist, und auch, wenn A nicht weiß ist, B notwendig groß ist. [...]. Wenn also B nicht groß ist, so ist es nicht möglich, daß A weiß ist. Ist aber, wenn A nicht weiß ist, B notwendig groß, so folgt notwendig, daß wenn B nicht groß ist, eben dieses B groß ist, was unmöglich ist. Denn wenn B nicht groß ist, wird A notwendig nicht weiß sein. Wenn nun, falls dieses nicht weiß ist, B groß sein wird, so folgt wie durch drei Begriffe, daß B, wenn es nicht groß ist, groß ist." [Übersetzt von Eugen Rolfes, *in*: Aristoteles 1995, 105]
Hier behauptet Aristoteles zurecht, daß ein Schlußsatz, der aus falschen Prämissen folgt, nicht notwendigerweise wahr sein muß. Die Begründung von Aristoteles für diese Behauptung beruht auf der Ablehnung der Aussage $\neg B \rightarrow B$. Zwei Implikationen der Form $A \rightarrow B$ und $\neg A \rightarrow B$ können nicht gleichzeitig wahr sein: Aus $A \rightarrow B$ ergibt sich durch Kontraposition $\neg B \rightarrow \neg A$, und aus $\neg B \rightarrow \neg A$ sowie $\neg A \rightarrow B$ folgt durch Transitivität eben $\neg B \rightarrow B$, und dies ist laut Aristoteles unmöglich (*αδυνατον*).

$A \rightarrow B$ und $\neg A \rightarrow B$ unverträglich sein. Die Aussagen $\neg(\neg A \rightarrow A)$ und $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)$ werden wir demnach, wieder in Anlehnung an McCall, die erste und die zweite *aristotelische These der Konnexität* nennen [Vgl. McCall 1966, 415].

Kommen wir nun zu den disjunktiven hypothetischen Aussagen, die bei Boethius manchmal einschließend und manchmal ausschließend sind. Wichtig bei der Rezeption seines Werkes sind folgende Zeilen, in denen die disjunktive Aussage mit Hilfe des Konditionals definiert wird:

> Denn, wenn so gesagt wird: „Entweder ist A nicht, oder B ist nicht" wird gesagt: „Wenn A ist, wird B nicht sein" und „Wenn B ist, wird A nicht sein".[9]

An dieser Stelle scheint Boethius zu meinen, daß die disjunktive Aussage ein Konditional *secundum accidens* darstellt. Dies ist, wie wir noch ausführen werden, der Ursprung der materialen Implikation der Booleaner des 19. Jahrhunderts.

Schließlich muß noch angemerkt werden, daß der Begriff der hypothetischen Urteile bzw. Aussagen als Oberbegriff für zusammengesetzte Urteile zu denken ist, die in Abgrenzung zu den kategorischen Urteilen auftreten. Die elementaren Bestandteile eines hypothetischen Urteils sind kategorische Urteile. Kategorische Urteile werden durch eine Subjekt-Prädikat-Aussage wiedergegeben. Bei den kategorischen Urteilen ist das prädikative Moment, und nicht das Bedingungsmoment entscheidend. So ist z.B. *Der Mensch ist ein Tier* eine kategorische, *Wenn es Mensch ist, dann ist es Tier* jedoch eine hypothetische Aussage. Das prädikative Moment kategorischer Urteile wird behauptet, wohingegen hypothetische Aussagen keine behauptende, sondern nur eine verbindende Kraft aufweisen [Vgl. Boethius 1969, Buch I, Kapitel 5-7, S. 206-208]. Also sind kategorische Urteile Bestandteile der hypothetischen, nicht aber umgekehrt. Auch wenn im Werk von Boethius das Moment der Bedingung für die hypothetischen Urteile (im Gegensatz zu den kategorischen Urteilen) bestimmend ist, so ist nicht ganz klar, ob sich dieses Moment auf Begriffe oder aber auf Aussagen bezieht. Diese Zweideutigkeit der hypothetischen Urteile kann man auch in den logischen Werken des 19. Jahrhunderts wiederfinden. In diesem Zusammenhang ist es sinnvoll, die Definition der hypothetischen

---

[9] Die Übersetzung stammt von Bochenski 1956, Text 24.13, S. 159. Der Originaltext lautet:
«nam cum ita proponitur: "aut non est a, aut non est b", ita dicitur: "si sit a, non erit b"; et "sit b, non erit a".» [Boethius 1969, Buch III, Kapitel xi, Paragraph 1, Zeilen 1-4, S. 384]

Aussage von Sir William Hamilton (1788-1856) zu untersuchen, der einer der einflußreichsten traditionalistischen Logiker des 19. Jahrhunderts war, deren ablehnende Haltung bzgl. der Mathematisierung der Logik von Boole mißbilligt wurde[10].

b) Hamilton

Hamilton, der sich auf Boethius beruft, hebt den starken Zusammenhang der hypothetischen Urteile *secundum naturam* hervor. Er meint sogar, daß das Konditional der Oberbegriff für nicht-kategorische Urteile sein muß[11]. Konditionale Urteile sollen demnach ausschließend disjunktive, hypothetische und dilemmatische Urteile umfassen. Hypothetische Urteile sollen die notwendigen Zusammenhänge in Form von Wenn-Dann-Verknüpfungen darstellen. Dilemmatische Urteile sind laut Hamilton Wenn-Dann-Aussagen, die mindestens eine ausschließende Disjunktion in ihren Teilaussagen enthalten. Wegen ihres Einflusses auf die Literatur der Logik sind folgende Punkte bei Hamiltons Rezeption von Boethius wichtig:

1. Hamilton unterstreicht im Gegensatz zu Boethius und im Einklang mit Kant[12], daß kategorische und konditionale Urteile unterschiedlichen Kategorien angehören, und daß es keine Art der Reduktion einer Kategorie auf die andere geben kann.

---

[10] In der Einführung zu *The Mathematical Analysis of Logic* schreibt Boole diesbezüglich:
"Sir W. Hamilton has contended, not simply, that the superiority rest with the study of Logic, but that the study of Mathematics is at once dangerous and useless."* (**Edinburgh Review*, vol. LXII, p. 409, and *Letter to A. De Morgan, Esq.*). [Boole 1847 ; Neuauflage 1965, 11]

[11] "By many of the schoolmen, however, the term *hypothetical* (*hypotheticus*) was used to denote the genus, and the term conditional, to denote the species, and from them this nomenclature has passed into many of the more modern compends of logic [...]. This latter usage is wrong. If either term is to be used in subordination to the other, *conditional*, as the more extensive term, ought to be applied to designate the genus [...]." [Hamilton 1866, 236-237]

[12] „Einige glauben: es sei leicht, einen hypothetischen Satz in einen kategorischen zu verwandeln. Allein dieses geht nicht an, weil beide ihrer Natur nach ganz von einander verschieden sind. In kategorischen Urteilen ist nichts problematisch, sondern alles assertorisch; in hypothetischen hingegen ist nur die Konsequenz assertorisch. In den letztern kann ich daher zwei falsche Urteile miteinander verknüpfen; denn es kommt hier nur auf die Richtigkeit der Verknüpfung — die Form der Konsequenz an; worauf die logische Wahrheit dieser Urteile beruht." [Kant 1800, A 164 ; Neuauflage 1983, 536]

2. Hypothetische, (ausschließend) disjunktive und dilemmatische Urteile sind das Resultat eines geistigen Aktes, der einen untrennbaren inhaltlichen Zusammenhang zwischen den einfachen Teilen dieser Urteile festlegt.

3. Die Unterteilung der konditionalen Urteile folgt aus einer Differenzierung in der syntaktischen Position der Bedingung: Wird das grammatikalische Prädikat vom Subjekt bedingt, so ergibt sich eine hypothetische Aussage, wird das Subjekt aber vom Prädikat bedingt, ergibt sich eine Disjunktion, wird schließlich die Bedingung sowohl vom Prädikat als auch vom Subjekt ausgedrückt, so ergibt sich eine dilemmatische Aussage[13].

Hamiltons Begründung dafür, daß hypothetische Urteile nicht auf eine Zusammensetzung von kategorischen Urteilen reduzierbar sind, beruht auf seinem in Punkt 2 bereits erwähnten Begriff des Zusammenhangs, in dem Kantischer Wortschatz unverkennbar ist. Bei den Wenn-Dann-Aussagen, die mit Boethius' *connexae propositiones secundum naturam per terminorum positionem* gleichzusetzen sind, liegt das bedingende Moment in der Abhängigkeit des Dann-Teiles, also des grammatikalischen Prädikats, vom Wenn-Teil, also vom Subjekt. Diese Abhängigkeit soll laut Hamilton als Ausdruck eines kausalen Zusammenhangs, in dem die Ursache dem Wenn-Teil und die Wirkung dem Dann-Teil entspricht, verstanden werden[14]. Dieser kausale Zusammenhang, den Hamilton als notwendig deutet, macht es unmöglich, die Teile

---

[13] "I proceed, therefore, to the genus of propositions as opposed to categorical, — viz. the Conditional — Conditioned. This genus, as stated in the paragraph, comprises two species, according as the condition lies more proximately in the subject, or in the predicate; to which is to be added, either as a third species, or as a compound of these two, those propositions in which there is a twofold condition, — the one belonging to the subject, the other to the predicate. The first of these, as stated, forms the class Hypothetical, the second that of Disjunctive, the third that of Dilemmatic, propositions." [Hamilton 1866, 236]

[14] "In the proposition, B is A, the subject B is unconditionally thought to exist, and it thus constitutes a categorical proposition. But if we think the subject B existing only conditionally, and under this conditional existence enunciate the judgment, we shall have the hypothetical proposition, If B is, A is [...]. In an hypothetical proposition the objects thought stand in such a mutual relation, that the one can only be thought in so far as the other is thought; in other words, if we think the one, we must necessarily think the other. They thus stand in the relation of Reason and Consequent." [Hamilton 1866, 237]

der Wenn-Dann-Aussage mit kategorischen, einfachen Aussagen zu identifizieren. Genauer gesagt meint er, daß der geistige Akt, der zu einer Wenn-Dann-Aussage führt, eine so starke Verbindung ergibt, daß deren Teile nicht voneinander zu trennen sind. Kurz, Hamilton behauptet, daß Wenn-Dann-Aussagen keine komplexen, sondern einfache Aussagen sind[15]. Ähnlich argumentiert er für die Irreduzibilität der disjunktiven und dilemmatischen auf kategorische Urteile. Interessant ist sein Beispiel für die disjunktiven Urteile, das von Kant stammt, und später auch von Boole diskutiert wird [Vgl. Kant 1800, A 167-168, Neuauflage 1983, 538f; und Boole 1847, 58-59]. Hamiltons Argument besteht aus folgenden zwei Schritten:

a) <u>Das Subjekt einer disjunktiven Aussage bindet die Disjunktion des Prädikats</u>: Wenn man einem Subjekt mehrere Prädikatoren, die im grammatikalischen Prädikat liegen, unter der Bedingung zuspricht, daß nur mindestens einer von ihnen zutrifft, dann wird dieses Subjekt vom grammatikalischen Prädikat bedingt. Hamilton gibt folgendes Beispiel: *Menschen sind schwarz oder weiß.* In diesem Beispiel spricht man von Menschen insofern sie weiß oder schwarz sind. Eine solche prädikative Bedingung des grammatikalischen Subjektes besagt also, daß der Bereich (Hamilton verwendet den auf Kant zurückgehenden Ausdruck *sphere*) des Prädikators 'Mensch' zwei sich gegenseitig ausschließende Teile bindet[16]. Mit dem Ausdruck

---

[15] "Although, therefore, an hypothetical judgement appear double, and may be cut into two different judgments, it is nevertheless not a composite judgement. [...] The relatives *if* and *then*, in which the logical synthesis lies, constitute thus an act one an indivisible." [Hamilton 1866, 238f]

[16] "Now, although in consequence of the multiplicity of its predicates, a disjunctive proposition may be resolved into a plurality of judgements, still it is not on that account a complex or composite judgement. For it is realised by one simple energy of thought, in which the two relatives, — the *either* and the *or* — are thought together as inseparable, and as binding up the opposing predicates into a single sphere." [Hamilton 1866, 240f]

Interessant ist, daß Hamiltons Begriff der ausschließenden Disjunktion anscheinend intensional ist, d.h. er kann mittels eines starken Wenn-Dann wiedergegeben werden:

"The attributes thus disjunctively predicable of the subject, constitute together a certain sphere or whole of extension; and as the attributes mutually exclude each other, they may be regarded as reciprocally reason and consequent." [Hamilton 1866, 240] Eine konsequente Rekonstruktion dieses Disjunktionsbegriffes ist mit der Regel der Addition nicht mehr vereinbar. [Vgl. Rahman 1997b, II(A).5] 'binden' (*to bind up*) meint Hamilton hier, daß es Menschen gibt, die entweder schwarz oder weiß sind, und daß es im Kontext dieser Aussage keine andere Art von Menschen gibt.

b) Wenn die disjunktive Aussage als eine komplexe Aussage betrachtet wird, dann muß laut Hamilton die Bindung der Disjunkta aufgegeben werden: Somit ergeben sich zwei getrennte kategorische Aussagen, nämlich *Entweder sind (alle) Menschen schwarz oder (alle) Menschen sind weiß*. Diese komplexe kategorische Aussage läßt sich offensichtlich nicht aus der Aussage *Menschen sind schwarz oder weiß* ableiten. Hieraus folgt, daß die disjunktive Aussage nicht als komplexe betrachtet werden kann.

Hier muß darauf hingewiesen werden, daß wenn Hamilton von Bedingungen spricht, er oft die bedingte Prädikation über ein Individuum (bzw. einen Individuenbereich) meint, das sowohl im grammatikalischen Subjekt als auch im grammatikalischen Prädikat vorkommt. Somit führt er seine Analyse der disjunktiven Urteile nicht an junktorenlogischen Disjunktionen, sondern an quantifizierten Aussagen der Syllogistik durch. Meist aber unterscheidet Hamilton das grammatikalische Subjekt selbst vom Individuenbereich der im grammatikalischen Subjekt vorkommenden Prädikatoren nicht. Sein oben angeführtes Argument beruht eben auf dieser Gleichstellung. Man könnte mit MacColl einwenden, daß auch die Aussage *Entweder sind (alle) Menschen schwarz oder (alle) Menschen sind weiß* eine bedingte Aussage ist. Die Ausdrücke *Mensch*, *weiß* und *schwarz* sind allesamt Prädikatoren, die durch einen Individuenbereich, etwa Lebewesen, gebunden werden. In diesem Zusammenhang muß auf eine wichtige Bemerkung von Narahari Rao hingewiesen werden: Die Relation des Zusammenhangs der konditionalen Urteile ist für den Kantianer Hamilton primär eine inhaltliche Relation zwischen Begriffen, die, wie Rao es ausdrückt, 'mögliche Individueninstanzen' haben können[17]. Der Zusammenhang im Prädikat und im Subjekt der bedingten Aussagen Hamiltons ist prinzipiell ein inhaltlicher, kein extensionaler. Die Relation zwischen Individuenbereich und Prädikator ist eher die der Komprehension, und deswegen ist die oben erwähnte Unterscheidung bei Hamilton nicht angebracht[18]. Es

[17] Dies wurde von Narahari Rao in einem gemeinsamen Seminar über das Wenn-Dann an der Universität des Saarlandes vorgeschlagen.

[18] Hamilton könnte also folgendermaßen argumentieren: Der Ausdruck Lebewesen ist kein unterstellter, bindender Individuenbereich sondern ein

ist gerade dieser inhaltliche, d.h. begriffliche Zusammenhang, den Hamilton in den von ihm kritisierten formalistischen Versuchen der algebraizistischen Fassung der Logik vermißt.

Für die Booleaner dagegen hat Hamilton einen zu hohen Preis für den Erhalt einer inhaltlichen Logik gezahlt. In seiner Logik wird die seit spätestens Boethius akzeptierte Kompositionalität hypothetischer Aussagen, d.h. daß hypothetische Aussagen als komplexe kategorische Aussagen aufgefaßt werden, aufgegeben und durch einen undurchsichtigen Geistesakt ersetzt.

I.B. Die *Hypotheticals* bei Boole und den Booleanern

a) Boole

In *The Mathematical Analysis of Logic* gibt Boole eine Definition der hypothetischen Aussage, die eher an die Tradition von Boethius und Abaelardus als an die von Hamilton anknüpft. Bereits in den ersten Zeilen seines Kapitels über *Hypotheticals* werden hypothetische Aussagen als komplexe kategorische Aussagen dargestellt. Dabei wird die heutige formale Aussagenlogik eingeführt [Vgl. Boole 1847, 48]. Boole verwendet hier die gleichen Symbole, die er bereits für die Prädikatenlogik eingeführt hatte, versieht sie aber mit einer anderen Interpretation. Großbuchstaben wie X, Y, Z stehen demnach für Aussagen. Ein kleiner Buchstabe x dagegen symbolisiert eine Auswahloperation, und zwar diejenige,

> [who] shall select those cases in which the Proposition X is true [Boole 1847, 49],

aus dem hypothetischen Universum *1*,

> [that] shall comprehend all conceivable cases and conjunctures of circumstances. [Boole 1847, 49]

Das hypothetische Universum soll also die möglichen Kombinationen der Wahrheitsbedingungen einer Aussage bzw. einer

---

Begriff: Die komplexe kategorische Aussage lautet demnach Entweder sind menschliche Lebewesen schwarz (bzw. Entweder sind alle Instanzen des Begriffes 'Mensch und Lebewesen' auch Instanzen des Begriffes Schwarz) oder menschliche Lebewesen sind weiß (bzw. oder alle Instanzen des Begriffes 'Mensch und Lebewesen' sind auch Instanzen des Begriffes Weiß), die einfache hypothetische Aussage dagegen Menschliche Lebewesen sind entweder schwarz oder weiß (bzw. Jede Instanz des Begriffes 'Mensch und Lebewesen' ist auch entweder eine Instanz des Begriffes Schwarz oder eine Instanz des Begriffes Weiß).

Aussagenverknüpfung enthalten, die Wittgenstein später mit den Wahrheitstafeln erfaßt hat[19].

Dies erlaubt es Boole, die Junktoren durch die Bestimmung ihrer Wahrheitsbedingungen einzuführen, wobei zu bemerken ist, daß obwohl er das Symbol '+' für die ausschließende Disjunktion verwendet, auch die einschließende Disjunktion von ihm betrachtet wird [Vgl. Boole 1847, 52-53], und daß die Aussage 'Wenn *X*, dann *Y*' in die Gleichung $x(1-y)=0$ übergeht [Vgl. Boole 1847, 54]. So kann Boole die hypothetische Aussage als einen Spezialfall seines symbolischen Systems betrachten.

Schon hier läßt sich erkennen, wie die traditionelle Fassung der hypothetischen Aussagen umgedeutet wird:

1. Die problematische Modalität der traditionellen hypothetischen Aussagen wird in das hypothetische Universum verlagert, das alle möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten enthält. Somit sind formal wahre Aussagen — also die Aussagen, deren Wahrheitsbedingungen sich gänzlich mit dem hypothetischen Universum decken — in dem Sinne problematisch, daß der tatsächliche Wahrheitswert der Teilaussagen nicht von Belang ist.
2. Inhaltliche Zusammenhänge werden durch Wahrheitsbedingungen ersetzt. Die Idee der Kausalität bei Wenn-Dann-Aussagen wird nunmehr abgelehnt[20].
3. Das Gegensatzpaar bedingt-unbedingt, das traditionell verwendet wurde, um zwischen hypothetischen und kategorischen Urteilen zu unterscheiden, wird jetzt durch

---

[19] Booles Definition dieses hypothetischen Universums kann in der Tat als eine Wahrheitstafel beschrieben werden:

"Thus if we associate the propositions X and Y, the total number of conceivable cases will be found as exhibited in the following scheme.

Cases	*Elective expressions*	
1st	X true, Y true	xy
2nd	X true, Y false	$x(1-y)$
3rd	X false, Y true	$(1-x)y$
4th	X false, Y false	$(1-x)(1-y)$ " [Boole 1847, 50]

[20] Diese Ablehnung von Boole kann man in seinem Postscript zu *The Mathematical Analysis of Logic* finden:

"It must be added that Aristotle's view is consistent with the sense (albeit an erroneous one) which in various parts of his writings he virtually assigns to the word Cause, viz. an antecedent in Logic, a sense of the conclusion." [Boole 1847, 82]

> die unterschiedliche Interpretation des symbolischen Systems ersetzt. Demnach benötigen kategorische Aussagen Klassen von Individuen, hypothetische Aussagen dagegen Klassen von Wahrheitswerten. Boole erläutert diesen Unterschied anhand des oben angeführten Beispiels der disjunktiven Aussage bei Kant und Hamilton: Daß die Allquantifikation in der disjunktiven Aussage nicht distributiv ist, wird von Boole als Zeichen dafür verstanden, daß es sich bei der Aussage *Entweder sind (alle) Menschen schwarz oder (alle) Menschen sind weiß* um Klassen von Wahrheitswerten dreht, d.h. daß es sich um eine hypothetische Aussage handelt, bei der Aussage *Menschen sind entweder schwarz oder weiß* dagegen um eine kategorische [Vgl. Boole 1847, 58-59].

Dies bewirkt u.a., daß der starke modale Zusammenhang des Wenn-Dann durch die materiale Implikation ersetzt wird. So ersetzt Boole die stoische Definition der Aussage *Wenn A, dann B*, nämlich *Es ist unmöglich, daß A und nicht-B*, durch *Es ist falsch, daß A und nicht-B*. Beide Aussagen sind aber offensichtlich äquivalent gdw. das Wenn-Dann eine formale Wahrheit darstellt. Demnach sollte '$x=1$' in etwa bedeuten:

> Man kann aus der Menge aller möglichen (Wahrheitswert-)Situationen (*cases*), die im hypothetischen Universum *1* enthalten sind, keine Situationen auswählen, in denen die Aussage *X* falsch ist.

Kurz, die Gleichung '$x=1$' drückt eine formale Wahrheit — in der Ausdrucksweise Wittgensteins eine Tautologie — aus. Dies besagt z.B., daß die algebraische Fassung Booles auf den modus ponens nur dann anzuwenden ist, wenn beide Prämissen des hypothetischen Syllogismus logische Notwendigkeiten darstellen:

Die Anwendung des modus ponens z.B. auf die Aussagen: 'Wenn *X* wahr ist, dann ist *Y* wahr' und '*X* ist wahr' kann somit nach Boole folgendermaßen algebraisch durchgeführt werden:

i) $x=1$ ('*X* ist wahr')

ii) $x(1-y)=0$ ('Wenn *X* wahr ist, dann ist *Y* wahr' bzw. 'Es ist falsch, daß *X* und nicht-*Y* wahr sind')

iii) $1(1-y)=(1-y)=0$ (aus i) und ii))

----

iv) $y=1$ (aus iii)) [Vgl. Boole 1847, 56]

Logisch kontingente Aussagen können also, wie schon von Prior angemerkt [Vgl. Prior 1949, 173], nicht ohne zusätzliche Maßnahmen in diesem System durch Gleichungen dargestellt werden. Aus diesem Grund ersetzt Boole später die Wahrheitssituationen durch die so oft kritisierte Klasse der Zeitzustände, was einen Schritt zurück in Richtung Stoizismus bedeutet:

> The distinction must be familiar to every reader of Plato and Aristotle, by the latter of whom, especially, it is employed to denote the contrast between the abstract verities of science, such as the propositions of geometry which are always true, and those contingent or phaenomenal relations of things, which are sometimes true and sometimes false. But the forms of language in which both kinds of propositions are expressed manifest a common dependence upon the idea of time; in the one case a limited to some finite duration, in other as stretched out to eternity. [Boole 1854, 163-164]

Die Auswahlfunktion x soll demnach die Menge von Zeitmomenten auswählen, in denen die Aussage X wahr ist. Jetzt kann Boole den Ausdruck '$x=1$' bzw. '$x=0$' folgendermaßen deuten:

> Die Menge der Zeitmomente, in der die Aussage X wahr bzw. falsch ist, deckt sich gänzlich bzw. überhaupt nicht mit der Menge aller Zeitmomente, die für den Kontext der Aussage relevant sind (d.i. das *universe of discourse* oder *1*). Die Zahl *1* bezeichnet manchmal auch die universale Menge 'Ewigkeit', d.h. die Menge aller möglichen Zeitmomente. [Boole 1854, 166-167]

Wenn die Auswahlfunktion x weder mit *1* noch mit *0* gleichzusetzen ist, stellt sie die Auswahl einer Menge von Zeitmomenten dar, in denen die Aussage X kontingenterweise wahr ist.

Im *Postscript* zu *The Mathematical Analysis of Logic* schreibt Boole sinngemäß, daß die Menge der kontingenten Aussagen den Berührungspunkt von kategorischen und hypothetischen Aussagen darstellt [Vgl. Boole 1847, 82]. Dieser Hinweis kann im Kontext der oben ausgeführten Definition der kontingenten Aussagen folgendermaßen rekonstruiert werden: In *An Investigation of the Laws of Thought* führt Boole aus, daß der Ausdruck x die Auswahlfunktion sowohl einer kategorischen als auch einer hypothetischen Aussage darstellen kann. Sei eine bestimmte Behauptung, die eine Klassenrelation zwischen Dingen feststellt, etwa *Schnee gehört zur Klasse der weißen Dinge* gegeben, so ergibt sich eine kategorische Aussage. Setzt man dagegen die Aussage *Die Behauptung: 'Schnee gehört zur Klasse der weißen Dinge' ist wahr,* so wird eine hypothetische Aussage ausgedrückt. Daraus erhellt, daß bei der Unterscheidung zwischen 'kategorisch' und 'hypothetisch' nicht der Gegensatz 'bedingt-unbedingt' im Vordergrund steht, sondern die Unterscheidung zwischen der ontologischen Ebene (d.h. einer Ebene der Dinge) der *Categoricals* und der Sprachebene (d.h. einer Ebene der Aussagen) der *Hypotheticals*. So kann derselbe symbolische Ausdruck, z.B. $x=y$, sowohl für die Identität zweier Klassen als auch für die Behauptung *Die Aussage, durch die die Identität der Klassen* X *und* Y *festgestellt wird, ist wahr* stehen. Deswegen spricht Boole hier lieber von *primary* und *secondary propositions* [Vgl. Boole 1854, 52-54]. Voraussetzung dieser Konversionsregel ist, daß die hypothetische aus einer einfachen kontingenten Aussage (und dem Wahrheitsprädikator) besteht. Wäre die hypothetische Aussage formal wahr, so wäre sie komplex und würde aus zwei kategorischen Aussagen bestehen.

Diese Konversionsmethode zwischen hypothetischen und kategorischen Aussagen, wodurch die sekundäre Aussage *'A' ist wahr* aus der primären Aussage *A* gebildet wird, führte zur Diskussion darüber, ob kategorische und hypothetische Aussagen äquivalent und somit ihre Unterscheidung überflüssig ist — eine Diskussion, die später von MacColl wieder aufgenommen wurde. Sehen wir aber diesbezüglich zunächst die Vorarbeit der Booleaner.

b) Die Booleaner

Die Arbeiten von u.a. W.S. Jevons, E. Schröder, C.S. Peirce und J. Venn haben das Werk von Boole vereinfacht und ihm das klassische Profil gegeben, das man ihm heutzutage zuschreibt. Die zeitliche Interpretation der sekundären Aussagen z.B. wurde im allgemeinen abgelehnt[21]. Sowohl die problematische Modalität als

---

21 So schreibt Venn:

"This mode of treatment [of secondary propositions], combined with his rather fetched and unnecessary doctrine (as it seems to me) that propositions of this secondary kind were peculiarly interpretable in terms of *time*, has probably contributed to make some writers forget how completely Boole had grasped the possibility of this interpretation of his symbolic methods." [Venn 1881, 435]

Auffällig ist, daß Venn diese Kritik übt, obwohl er, was die Formulierung der Aussagenlogik betrifft, die Notwendigkeit erkennt, auch Aussagen, die nicht formal wahr sind, ausdrücken zu können. [Vgl. Venn 1881, 440-452]

Eine ähnliche (modernere) Ablehnung der Einführung von Zeitzuständen kann man auch in Kneale & Kneales Buch finden [Vgl. Kneale/Kneale 1962, 414].

Entscheidender als der Vorwurf der 'Überflüssigkeit' ist aber unseres Erachtens MacColls Bemerkung, daß Booles Deutung der Logik die Gegenstandsebene nicht verläßt. (Siehe unsere Einleitung) auch der starke inhaltliche Zusammenhang hypothetischer Aussagen wurden als Merkmale der natürlichen Sprache betrachtet, und aus dem Reich der formalen Logik verbannt. Venn schreibt in diesem Zusammenhang:

> Briefly put, my own view as to what may be called the fundamental significance of the hypothetical form is best expressed by saying that it (1) implies a connection, of the kind called a uniformity between two or more phenomena; and (2) implies, along with this, some doubt on our part as to the actual occurrence, in a given instance, of the pair or more of events which compose this uniformity.[...] As regards the limits of this characteristic doubt, it should be observed that it refers only to the actual occurrence, under some given circumstances, of the elements which compose this connection or uniformity. [Venn 1881, 210-211]

> My contention is that the really characteristic elements of the Hypothetical — those which give it the peculiar significance which it possesses in common life and in Inductive Logic — are of a comparatively non-formal nature. They are to a considerable extent either material or psychological, and therefore the necessity of forcing them into our system will crush much of the life out of them. Such a loss as this is however inevitable. [Venn 1881, 243-244]

Damit wurde auch die traditionelle Unterscheidung zwischen hypothetischen und kategorischen Aussagen in der formalen Logik fallengelassen. Ein wichtiger Ausgangspunkt für die Aufhebung dieser Unterscheidung war das Wenn-Dann. Venn meinte, daß die elementare Form eines hypothetischen Urteils diejenige ist, die einer Wenn-Dann Aussage entspricht:

> The conclusion then that we have so far come to is that a very large proportion, in fact an overwhelming majority, of ordinary hypotheticals, though they may demand for their convenient expression more than two terms, are nevertheless to all intents and purposes composed of a pair only of elements. Their actual complexity is mainly a matter of linguistic propriety or convenience. They admit therefore of adequate verbal expression in the form already alluded to, viz. If P then Q. [Venn 1881, 221]

A. Macfarlane schlug in seinem Buch *Algebra of Logic* vor, die Gleichung $xy=c$ (d.h. falls x ein y ist, so ist es c) als allgemeine Form eines bedingten, und die Gleichung $x=c$ (d.h. x ist c) als die eines kategorischen Urteils anzunehmen [Macfarlane 1879, 81]. Venn bemerkt zu Recht, daß Macfarlanes Formel schon in J. H. Lamberts Definition der hypothetischen Aussagen (Lambert spricht eigentlich von hypothetischen Sätzen) enthalten ist [Venn 1881, 217]. Nun stellt die Gleichung $A=AB$ eine der bekanntesten formalen Fassungen der Aussage *Wenn A, dann B* dar: $(A \rightarrow B)=1 \stackrel{df}{\Longleftrightarrow} ((A=1) \wedge (B=0))=0 \stackrel{df}{\Longleftrightarrow} (A=AB)$. Diese Gleichung, die eigentlich von Leibniz stammt, wurde jedoch von den Booleanern, insbesondere von Jevons, hauptsächlich für die kategorischen Aussagen verwendet[22]. Da also das Wenn-Dann die logische Struktur sowohl kategorischer als auch hypothetischer Aussagen darstellt, meinten die Booleaner, daß die logische Sprache über keine Mittel verfügt, mit denen man eine solche Unterscheidung wiedergeben kann[23]:

Dies steht wieder im Einklang mit der Rechtfertigung einer klassischen, wertdefiniten Deutung des Wenn-Dann:

> Briefly put, my meaning is this: I fully admit the broad practical distinction between the cases which fall naturally into the [hypothetical] 'If P then Q', and those which fall into the [categorical] 'P is Q' form; and also the fact that although common speech can sometimes bridge over the distinction by the convenient introduction of a predicate, it far more often cannot do this. But none the less they both display the same essential characteristics of what may be called 'predication' in a generalized sense of the term. They both alike yield the four alternatives which we want: viz. P asserted, Q asserted; Q denied, P denied; P denied; Q (so far) doubtful; Q asserted, P (so far) doubtful. And this is the essential point for purposes of judgment and inference. [Venn 1881, 223-224]

Die Aufhebung der problematischen Modalität der Aussagen hatte den Booleanern Schwierigkeiten bei der Interpretation der

---

[22] Vgl. [Jevons 1864, 52].
Venn berichtet bezüglich Jevons' Verwendung der Gleichung $A=AB$ für die Formulierung der Allaussage folgendes:
"There is a third form [for the symbolic expression of 'All x is y'], which was probably first employed by Leibnitz[2] [[2] *Difficultates quedam logicae*. 'Omne A est B, i.e., aequivalent AB et A'.]. It is discussed by Ploucquet[3] [[3] *Sammlung, &c.* p. 262 (vgl. [Ploucquet 1762, 262]), and is occasionally made use of by Lambert[4] [[4] *Sammlung*, p. 212; Log. Ab. I. 23 (vgl. [Lambert 1781, Kapitel I. 23])]. [...] This form is best known at present from its systematic employment by Jevons, who did not seem to be aware that it had been so much employed before him." [Venn 1881, 176-177].

[23] "Many hypotheticals, — in fact the vast majority [...], really consist of only two elements in thought: an antecedent and a consequent [...]. In all such cases the hypothetical is essentially of the form, 'If P then Q'. This we regard as being equivalent to, or rather as being covered by 'P is Q'. In other words, the really simple hypothetical does not (on our rendering) differ in any way from the categorical, nor therefore does it demand any peculiar form of expression." [Venn 1881, 237]

Gleichung *x=0* bereitet: Wenn jetzt *x* für die Wahrheit einer bestimmten Aussage *X* steht, was soll diese Gleichung dann bedeuten? Soll sie bedeuten, daß die Wahrheit der Aussage *X* falsch ist? Venns Lösung besteht darin, die problematische Modalität wieder einzuführen. Die Gleichung *x=0* soll ausdrücken, daß die Annahme der Wahrheit der Aussage *X* widerrufen werden muß:

> As we have said, x stands for the truth of a proposition: to put x=0 is a way of saying that there is no truth in it, that the truth of it is then and there excluded[1] [in dieser Fußnote kritisiert Venn Husserl, der *'0'* als Zeichen für die 'Unmöglichkeit' versteht]. If the reader feels any difficulty in thus employing a symbol to stand for the truth of a proposition, without at the same time committing ourselves to the fact that the proposition is true, he must remember that this is simply another version of precisely the same general distinction that we had to face at the outset. [...] What we have said hitherto was, let *x* stand for the class denoted by a given term: but this in no way committed us to the conclusion that any such class only comes up for decision when we introduce a proposition. If we put x=0, we deny its existence. [Venn 1881, 438-439]

Dies ist unseres Erachtens der kritische Ausgangspunkt von MacColls Überlegungen, in deren Mittelpunkt eine entscheidende Frage steht: Wie soll man die Ausdrücke *'x=1'* und *'x=0'* im Kontext einer hypothetisch gedeuteten Aussagenlogik verstehen? Gehen wir also zu MacColls Verständnis der hypothetischen Aussagen über.

II. MacColls Begriff der Hypotheticals

II.A. Die problematische Modalität der *Hypotheticals*

Hinsichtlich der Interpretation des Zeichens *'='* (in *'x=y'*) legt sich MacColl schon in Definition 1 seiner ersten Fassung der *Symbolical or Abbreviated Language* darauf fest, daß dieses Zeichen eine Äquivalenzrelation zwischen Aussagen (*statements* und/oder *propositions*) ausdrücken soll[24]. Seine *Symbolical Language* ist also kein Kalkül für die Berechnung von Gleichungen, sondern ein *Calculus of Equivalent Statements*. Welche Aussagen stellen *'x=1'* und *'x=0'* dar? MacColls Erläuterung dieser Symbole fällt in den ersten Schriften (1877-1879) ziemlich knapp aus:

---

[24] "Def. 1. - [...] the equation A=B asserts that A and B are equivalent statements." [MacColl 1877a, 91]

Def. 1. - [...] The equation A=1 *asserts* that the statement A is true; the equation A=0 *asserts* [unsere Hervorhebungen] that the statement A is false. [MacColl 1877a, 91. Siehe auch MacColl 1877d, 9]

Die Ausdrücke '$x=1$' und '$x=0$' sollen für die Aussagen '*x ist wahr*' und '*x ist falsch*' stehen — in MacColls eigener späterer Notation 'x^t' bzw. 'x^1' und 'x^f' bzw. 'x^0', wobei 'x' eine noch nicht verifizierte Behauptung (*statement*) und die hochgestellten Symbole die Prädikatoren '*(ist) wahr*' und '*(ist) falsch*' bezeichnen. Hier muß auf zweierlei hingewiesen werden: Zum einen bezeichnet das Symbol *1*, anders als bei Boole, nicht die Gesamtheit der möglichen Wahrheitswerte einer bestimmten Aussage, sondern den Prädikator '*(ist) wahr*'. Zum anderen muß das Zeichen '=' (in '$x=1$' und '$x=0$') demgemäß nicht als Äquivalenz, sondern als Kopula aufgefaßt werden.

$x=1 \overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} x^1$ bzw. x^t, d.h. 'x ist wahr'[25]
[MacColl verwendet die Notation x^τ]

$x=0 \overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} x^0$ bzw. x^f, d.h. 'x ist falsch'
[MacColl verwendet die Notation x^ι]

Diese doppelte Rolle des Zeichens '=', nämlich als Äquivalenzrelation und als Kopula, die von MacColl ausdrücklich angesprochen wird[26], vervollständigt die Aufhebung von Booles Gleichungssystem. Booles algebraische Gleichungen werden nun entweder durch Äquivalenzen oder durch Aussagen, die eine Binnenstruktur des Typs '*x ist y*' aufweisen, ersetzt. Hier muß noch bemerkt werden, daß die Binnenstruktur der Aussage '*x ist wahr*', die für die Gleichung '$x=1$' steht, ein Bestätigungsmoment (*assertion*) beinhaltet. Es ist keineswegs so, daß immer wenn eine Behauptung (*statement*) geäußert wird, die Wahrheit dieser dann auch mitbehauptet werden muß. Vielmehr muß noch beurteilt werden, ob das, was behauptet wurde, zu Recht behauptet wurde. Das Wort 'beurteilen' soll hier nicht an das Urteil der traditionellen Logik erinnern, sondern an den Gebrauch von 'Urteil' im juristischen Sinne. Dieser Vergleich wird vom späten MacColl zur Erläuterung seiner oben erwähnten Definitionen verwendet:

Def. 6. - Statements represented by letters or any other arbitrary symbols, which we attach only a *temporary* meaning, are usually statements whose truth or falsehood may be considered an open question, like the statements of witnesses in a court of justice. It is

---

25 "The symbol A is short for A^t, and may be read 'A is true'". [MacColl 1900a, 75]

26 "Other paradoxes arise from the ambiguity of the sign of equivalence (=)." [MacColl 1906a, 13]

> convenient therefore to have an invariable symbol which shall be applicable to any statement whose truth is admitted and unquestioned, and to such a statement only. The conventional symbol used for this purpose is the symbol *1*. For a like reason it is convenient to have an invariable symbol to represent any statement whose *falsehood* is admitted and unquestioned. The symbol used for this purpose is *0*. [MacColl 1880b, 53]

Erst dann, wenn der informative Gehalt, der durch das Behauptungszeichen '*x*' dargestellt wird, verifiziert wurde, kann man von einer bestätigten Behauptung sprechen. Nun ist es so, daß die Verifikation des informativen Gehaltes einer Behauptung die Artikulierung der Binnenstruktur dieser Behauptung (*statement*) erfordert. Ungewöhnlich ist dabei MacColls Definition von *statement*: Ein Wort (bzw. eine Gruppe von Wörtern), oder allgemeiner ein Zeichen (bzw. eine Gruppe von Zeichen), das zur Vermittlung von Information verwendet wird, nennt MacColl eine *Behauptung* (*statement*). MacColl scheint aber den Ausdruck *statement* sowohl für das Zeichen als auch für den informativen Gehalt dieses Zeichens (in der Foge werden wir nur hierfür den Ausdruck 'Behauptung' verwenden) zu gebrauchen. Wenn der informative Gehalt sprachlicher Zeichen durch einen Subjekt-Prädikat-Satz artikuliert werden kann, dann signalisieren diese Behauptungszeichen *Aussagen* (*propositions*). Nur durch die Artikulation einer Aussage bekommen Behauptungszeichen eine genaue Bedeutung[27]. Diese Artikulation ermöglicht es, die entsprechende Behauptung im Rahmen eines bestimmten (epistemischen) Kontextes zu bestätigen bzw. abzulehnen. Wenn die Behauptung noch nicht zu einer Aussage entfaltet wurde, dann ist ihr tatsächlicher Wahrheitswert nicht von Belang. So müssen die Satzeinheiten einer Tautologie als *statements* betrachtet werden in

---

[27] "I define a statement as any sound, sign, or symbol (or any arrangement of sounds, signs, or symbols) employed to give information; and I define a proposition as a statement which, in regard to form, may be divided into two parts respectively called subject and predicate. [...] A nod, a shake of the head, the sound of a signal gun, the national flag of a passing ship, and the warning 'Caw' of a sentinel rook, are, by this definition, statements, but not propositions. The nod may mean 'I see him'; the shake of the head, 'I do not see him'; the warning 'Caw' of the rook, 'A man is coming with a gun', or 'Danger approaches'; and so on. THESE PROPOSITIONS EXPRESS MORE SPECIALLY AND PRECISELY WHAT THE SIMPLER STATEMENTS EXPRESS MORE VAGUELY AND GENERALLY [unsere Hervorhebung]. [...] 'The big stag' and 'The killed stag'. These are not complete propositions; they are merely qualified subjects waiting for their predicates." [MacColl 1906a, 2-4]
So ähnlich auch schon in MacColl 1902b, 352-353.

dem Sinn, daß die formale Wahrheit der Tautologie von dem tatsächlichen Wahrheitswert dieser Satzeinheiten unabhängig ist.

Hypothetisch besagt nach MacColl, daß der Wahrheitswert als noch unbestimmt betrachtet werden muß. Der Übergang, der von einem bloß hypothetischen Wahrheitswert zum tatsächlichen Wahrheitswert führt (und der durch die Aussage '$x=1 \overset{df}{\Longleftrightarrow}$ *x ist wahr*' artikuliert wird), entspricht der booleschen Relation zwischen primären (in etwa kategorischen) und sekundären (in etwa hypothetischen) Aussagen. Diese Rolle der Bestätigung (*assertion*), die den Prädikatoren *'(ist) wahr'* und *'(ist) falsch'* zugesprochen wird, bewirkt, daß, anders als bei MacColls allgemeiner Definition der Aussage in der reinen Logik, die Kopula in den Aussagen '*x ist wahr*' und '*x ist falsch*' eine echte Subjekt-Prädikat-Verbindung, und keine verkappte Implikation darstellt. Die Einbettung der Prädikatoren *'(ist) wahr'* und *'(ist) falsch'* in eine entsprechende Metaaussage wird demzufolge durch ein graphisches Mittel signalisiert, das Hochstellen der (Bestätigungs-)Prädikatoren, das sich vom Implikationszeichen '*:*' unterscheidet[28].

Es gibt noch eine wichtige Konsequenz dieser Betrachtungsweise des Wahrheits- und des Falschheitsprädikators durch MacColl, die mit diesem Bestätigungsmoment zusammenhängt. Die Bestätigung, die durch diese Prädikatoren artikuliert wird, führt einen (pragmatischen) Wissenskontext ein, der trotz der Äquivalenz $x \leftrightarrow$ '*x*' *ist wahr* einen nicht-redundanten Gebrauch für den Wahrheitsprädikator festlegt. MacColl legt mehrere Argumente für die Irredundanz des Wahrheitsprädikators

---

[28] Die Unterscheidung zwischen einer Implikation und einer echten Kopula, in der der Prädikator eine Bestätigungsfunktion übernimmt, wird von MacColl ausdrücklich diskutiert:

"Let us suppose that *S, B, K* were respectively understood to mean 'It is a *stag*', 'It is *brown*', 'I have *killed* it'. Then $S_B{}^K$ [...] would mean 'The *brown stag* has been *killed* by me', or 'I have *killed* the *brown stag*'. Now, let it be observed that in this combination of the elementary statements *S, B, K* into the complex statement $S_B{}^K$ the statements *S* and *B are taken for granted as already known*, while the statement *K* is *asserted as fresh knowledge. Thus the categorical statement* $S_B{}^K$ *is analogous but not equivalent to the implication SB:K, which does not vouch for the truth of either S or B or K.*" [MacColl 1902b, 367]

Eine Interpretation des Gleichheitszeichens als Kopula wurde schon von Jevons verwendet:

"21. We denote by the copula *is*, or by the mark =, the sameness of meaning of the terms on the two sides of a proposition [...].

22. *A proposition is simply convertible.* The propositions A=B and B=A are the same statement." [Jevons 1864, 10]

dar. Er unterscheidet in diesem Zusammenhang zwei Argumentationen, die zeigen sollen, daß es sowohl pragmatisch anaphorische als auch epistemische Kontexte gibt, in denen die Ersetzung der Aussage *'A' ist wahr* durch die Behauptung *A* nicht sinnvoll ist, und zwar:

I. Eine pragmatische Argumentation, die zwischen der metasprachlichen Beurteilung und der objektsprachlichen (noch unbestätigten) Behauptung unterscheidet.

II. Eine formal semantische Argumentation, die die Einführung von intensionalen (sprich: epistemisch-temporalen) Kontexten (und gleichzeitig die modale Erweiterung der booleschen Logik) rechtfertigen soll.

Das pragmatische Argument beruht auf der Differenzierung zwischen dem metalogischen Urteil, das durch das Bestätigungs- bzw. Ablehnungsmoment des Wahrheits- bzw. Falschheitsprädikators ausgezeichnet ist, und der objektsprachlichen Behauptung, die lediglich eine affirmative bzw. negative Prädikation wiedergibt. MacColls Worte lauten in diesem Zusammenhang:

> It may be remarked that any statement A and its denial A' are always of the same degree, whereas A^τ and A^ι, their respective equivalents but not synonyms [...] are of one higher degree. The statement A^τ is a revision and confirmation of the judgement A [MacColl verwendet in den letzten Schriften den Ausdruck A^τ statt A^1 und A^ι statt A^0], while A^ι is a revision and reversal of the judgement A. [MacColl 1906a, 18]

Eine anaphorische Lesart dieses pragmatischen Arguments zeigt, daß MacColl damit schon eine Vorarbeit zu Grovers (et alia) *Prosentential theory of truth* geleistet hat [Vgl. Grover et alia 1975, 96]: Wenn A^τ als eine Bestätigung der Aussage *A* fungiert, dann kann A^τ durch *A* nicht ohne pragmatischen Verlust ersetzt werden. Anscheinend hatte MacColl Beispiele wie folgende im Auge:

1) Watson: Das Ereignis *a* fand statt. Holmes: Das ist wahr.
2) Alles was Holmes sagte ist wahr[29].

1) und 2) können selbstverständlich ohne Verlust an Wahrheitsgehalt folgendermaßen übersetzt werden:

---

[29] "If A = 'The event a did happen', then A^τ asserts that 'it is true that a did happen'. [...] Thus A^τ and A^ι are not exactly synonymous with A and A'." [MacColl 1902b, 361]

1*) Watson: Das Ereignis *a* fand statt. Sherlock Holmes: Das Ereignis *a* fand statt.
2*) Für alle Behauptungen *A* gilt: Wenn Holmes *A* behauptet, dann *A*.

Die pragmatische Pointe der anaphorischen Verwendung des Wahrheitsprädikators geht in diesen Übersetzungen aber offensichtlich verloren: Bei der anaphorischen Verwendung des Wahrheitsprädikators ist es Watsons Behauptung, die durch die Bestätigung als wahr beurteilt wird. Die assertorische Kraft dieses Bestätigungsmoments ist in 1*) aber nicht mehr erkennbar. Entscheidend ist für MacColl, daß bei dieser Art von Übersetzung oft, wie z.B. bei einer Übersetzung von 2), die Verallgemeinerungsfunktion der anaphorischen Verwendung des Wahrheitsprädikators — allgemein in dem Sinn, daß man auf den Inhalt der eingebetteten Behauptung bei Bekräftigungen oder Bestätigungen verzichten kann — verlorengeht. Der metasprachliche Aspekt und die Verallgemeinerungsfunktion von *t* (bzw. *1*) scheint in der Übersetzung 2*), in der A^{τ} durch *A* ersetzt wurde, zum Tragen zu kommen, aber eigentlich wird dort eher etwas über Holmes als über seine Behauptungen ausgesagt. Dem Wahrheitsprädikator schreibt MacColl also zwei Funktionen zu:

- Der Wahrheitsprädikator macht es möglich, allgemein (d.h. auf die Angabe des Inhalts der eingebetteten Aussagen verzichtend) argumentative Handlungen zu vollziehen. Der Ausdruck 'ist wahr' soll also den Abstraktionsprozeß in Gang setzen, durch den schematische Buchstaben in eine formale Argumentation eingeführt werden und der Übergang von primären zu sekundären Aussagen ermöglicht wird.
- Der Wahrheitsprädikator ist Anzeichen für eine vom Kontext der Äußerung abhängige Sprachhandlung, nämlich eine Bekräftigung oder eine Bestätigung. Hier nimmt MacColl P. F. Strawsons Wahrheitstheorie vorweg [Vgl. Strawson 1950, 44-50; Lorenz 1996, 598; und Astroh 1996].

Es ist die Verwendung der schematischen Buchstaben, die auf die Verallgemeinerungsfunktion des Wahrheitsprädikators zurückzuführen ist, welche die Äquivalenz von *A* und '*A*' *ist wahr* erlaubt. Diese Äquivalenz ist aber in epistemisch-modalen Kontexten nicht mehr gültig. MacColls eigene, umständliche Beweise für die Irredundanz der Wahrheitsprädikatoren bereiten nicht wenige Schwierigkeiten und sind oft nicht sehr überzeugend. Die Grundidee ist dennoch ziemlich klar: MacColl suchte Beispiele für das, was wir heute die Opazität modaler Operatoren nennen würden. Die Opazität modaler Operatoren zeigt, daß die extensionale Gültigkeit der Äquivalenz $A \leftrightarrow A^{\tau}$ nicht zugleich auch eine intensionale ist. Der Wahrheitsprädikator könnte z.B. einige Kontextsituationen fixieren, die nicht bei der Behauptung von A berücksichtigt worden sind — in MacColls Lieblingsbeispiel ist A^{τ} eine notwendige Aussage, d.h eine Aussage, die in allen epistemischen Kontextsituationen wahr ist[30].

MacColls Verständnis des Falschheitsprädikators als Bestätigung der Negation (kürzer: als Zurückweisung) ermöglicht es ihm somit, Venns Problem der Interpretation des Ausdrucks '$x=0$' mit Hilfe einer Theorie zu lösen, die den Übergang von der Äußerung einer Behauptung (in etwa Venns '*term*') zur entsprechenden bestätigten Aussage erläutert, und die aus einer nicht-redundanten Fassung des Falschheitsprädikators hervorgeht: Die Aussage x^0 bzw. $x=0$ soll demnach einen äquivalenten, aber nicht synonymen Ausdruck für die Bestätigung der Behauptung $\neg x$, d.h. $(\neg x)^t$ bzw. $(\neg x)^1$, also für die Zurückweisung der Behauptung x darstellen. Daß die oben angesprochenen Ausdrücke eben nicht synonym sind, veranlaßt den späten MacColl, Behauptungen durch Aussagen, die weder unmöglich noch notwendig sind, zu ersetzen. Um es kurz zu sagen, es ist der Begriff der kontingenten Aussage (*variable*), der im Hintergrund seines nicht-booleaneschen Systems der Aussagenlogik steht[31]. Es läßt sich ein Zusammenhang mit dem Problem der Interpretation der Symbole '*1*' und '*0*' herstellen: Wahrheit und Falschheit können, müssen aber nicht, formal erfaßt werden[32]. 'Wahr' und 'falsch' sind Prädikatoren, die in einen

---

30 "Suppose now that A denotes θ_{τ}, a variable that turns out true, or happens to be true in the case considered, though it is not true in all cases. We get $\varphi(A)=A^{\varepsilon}=\theta_{\tau}{}^{\varepsilon}=(\theta_{\tau})^{\varepsilon}=\eta$; for a variable is never a certainty, though it may turn out true in a particular case. Again, we get $\varphi(A^{\tau})=(A^{\tau})^{\varepsilon}=\theta_{\tau}{}^{\varepsilon}=(\theta_{\tau}{}^{\tau})^{\varepsilon}=\varepsilon$; for $\theta_{\tau}{}^{\tau}$ means $(\theta_{\tau})^{\tau}$, which is a formal certainty." [MacColl 1906a, 18]
Die Schwierigkeiten, die mit MacColls Notation bei seiner Darbietung dieses Argumentes verbunden sind, wurden von Stelzner herausgearbeitet [Vgl. Stelzner 1993].

31 Interessant ist dabei auch Booles Motivation für seine spätere Aussagenlogik war.

32 Kontingente Aussagen werden schon in MacColls früher Schrift *Symbolical or abbreviated language, with an application to mathematical probability* betrachtet, in der es (Booles *elective functions* ähnliche) Symbole *a, b, c* für Funktionen gibt, die folgendes bedeuten:
"*a* = the chance that A is true, *b* = the chance that B is true, and so on." [MacColl 1877a, 92]
In seinem späteren Aufsatz *Calculus of Equivalent Statements (second paper)*

Wissenskontext eingebettet sind, und in eben diesem Kontext als Artikulationen von Bestätigungen bzw. Zurückweisungen gedacht werden sollen. Die Möglichkeit, Wahrheit und Falschheit nicht-formal zu erfassen, ist andererseits mit MacColls oben diskutierter Definition der hypothetischen Aussage verbunden. Hypothetische Aussagen sind diejenigen, deren mögliche (oder auch kontingente) Wahrheit oder Falschheit nicht die formale Gültigkeit der Implikation, in der sie vorkommen, zerstören kann.

Untersuchen wir jetzt, nachdem wir MacColls Auffassung der problematischen Modalität der *Hypotheticals* betrachtet haben, wie MacColl den traditionellen Begriff des inhaltlichen Zusammenhangs erfaßt.

II.B. MacColls abhängige und unabhängige hypothetische Verknüpfungen

MacColls Begriff der *Hypotheticals* hat von Booles Definition der *secondary propositions* eine wahrheitsbedingte Deutung des inhaltlichen Zusammenhangs traditioneller hypothetischer Urteile geerbt:

Der inhaltliche Zusammenhang, der hypothetische Aussagen charakterisiert, soll formal durch Wahrheitsbedingungen formuliert werden. Genauer, die Wahrheitsbedingungen einer komplexen Aussage sind durch die Wahrheitsbedingungen ihrer Teilaussagen bestimmt, so daß man eine wahrheitsbedingte Abhängigkeitsrelation definieren kann. Boole spricht dies ausdrücklich aus:

> Secondary propositions also include judgments by which we express a relation or dependence of propositions. To this class or division we may refer conditional propositions, as, "If the sun shines the day will be fair". Also most disjunctive propositions, as,"Either the sun will shine, or the enterprise will be postponed". In the former example

---

findet sich eine ausdrückliche Definition solcher Aussagen, die er *consistent statements* nennt: "[...] one which *may* be true" [MacColl 1878a, 185].
Eine probabilistische Interpretation einer kontingenten Aussage wird wieder in Aufsatz IV der Reihe *The Calculus of Equivalent Statements (and Integration Limits)* aufgegriffen:
"In applying symbolical logic to probability, the following notation will, I think, be found useful.
DEF. 1. - The symbol x_a denotes the *chance* that the statement x is true *on the assumption that the statement a is true*." [MacColl 1880a, 113]
Diese Definition wird später zum modalen Begriff der Kontingenz weiterentwickelt [Vgl. MacColl 1896a].

> we express the dependence of the truth of the Proposition, "The day will be fair", upon the truth of the Proposition, "The sun will shine". In the latter we express a relation between the two Propositions, "The sun will shine", "The enterprise will be postponed", implying that the truth of the one excludes the truth of the other. [Boole 1854, 160]

Wie Boole unterscheidet auch MacColl zwei Typen von zusammenhängenden (*connected*) hypothetischen Aussagen, nämlich diejenigen, die mittels einer Disjunktion und diejenigen, die mittels eines starken Wenn-Dann verknüpft werden.

Disjunktive Aussagen, die MacColl anders als Boole hauptsächlich mit einschließender Disjunktion betrachtet, stellen einen schwachen Zusammenhang dar. Der Fall, in dem *B* wahr ist, aber *A* sowohl wahr als auch falsch sein kann, und die ganze Aussage trotzdem wahr ist, beschreibt offensichtlich eine einschließende Disjunktion, und auch eine materiale Implikation.

Der zweite Fall dagegen, in dem die Wahrheit bzw. Falschheit von *A* notwendigerweise die Wahrheit bzw. Falschheit von *B* bewirkt, und den MacColl mit dem Ausdruck '*is implied in*' umschreibt, schildert die Wahrheitsbedingungen eines starken Wenn-Dann, wobei zu beachten ist, daß diese Verknüpfung fordert, daß erstens *A* und *B* jeweils denselben Wahrheitswert erhalten, und daß zweitens der Wahrheitswert von *B* sich (notwendigerweise) nach dem Wahrheitswert von *A* richtet, aber nicht unbedingt umgekehrt. Der Wahrheitswert von *B* soll demnach eine abhängige Abbildung des Wahrheitswertes von *A* sein. Dieses starke Wenn-Dann, das MacColl von der philosophischen Tradition übernommen hat, wird wiederum, in Anlehnung an Boole, mittels der Festlegung von Wahrheitsbedingungen formuliert. Dabei verwendet MacColl modale Ausdrücke wie 'möglich' und 'notwendig', die in den ersten Schriften anscheinend metalogisch verstanden werden. So sind laut MacColl mögliche Aussagen konsistente Aussagen:

> DEF. 13.- The symbol A÷B asserts that A does *not* imply B; it is thus equivalent to the less convenient symbol (A:B)' [d.h. $\neg(A\rightarrow B)$].
> Note.- The symbol A÷B thus asserts that the truth of B is not a *necessary* consequence of the truth of A; in other words, it asserts that the statement A is consistent with B', but it makes no assertion as to whether A is consistent with B or not. [MacColl 1878a, 180]

> Note.- The implication α:β' asserts that α and β are inconsistent with each other; the non-implication α÷β' asserts that α and β are consistent with each other. [MacColl 1878a, 184]

> α is a consistent statement — i.e., one which may be true. [MacColl 1878a, 184]

Die Konsistenzbedingung wird von MacColl bei der Darstellung der von uns so genannten zweiten boethianischen These der Konnexität verwendet:

> RULE 18- If A (assuming it to be a consistent statement) implies B, then A does not imply B'; in other words, from the implication A:B we deduce the non-implication A÷B', which is equivalent to B÷A'. [MacColl 1878a, 180]

Die notwendigen Wahrheitsbedingungen, so wie sie in den ersten Schriften MacColls zu finden sind, und welche die Eigenschaften der metalogischen Implikation in die Objektsprache eines starken Wenn-Dann einführen, können folgendermaßen rekonstruiert werden:

> Der Vordersatz soll *möglich* sein, d.h. er soll mit dem Rest der Annahmen verträglich bzw. nicht-inkonsistent sein. Dies bewirkt, daß eine wahre Aussage weder von formalen noch von materialen Falschheiten (Widersprüchen) konnex impliziert wird. Mit anderen Worten: Weder durch die formale noch durch die materiale Falschheit der Prämisse(n) soll der Hintersatz redundant werden. D.h. ex falso sequitur quodlibet ist keine konnexe These, sehr wohl aber $\neg(\neg A \rightarrow A)$, da man die Wahrheit von $\neg A$ annehmen kann, und $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)$. Die letzte These, wie schon Aristoteles bemerkt hat, beruht offensichtlich auf der ersten: Wenn $A \rightarrow B$, dann folgt — durch Kontraposition — $\neg B \rightarrow \neg A$. Wenn $\neg B \rightarrow \neg A$ und $\neg A \rightarrow B$, dann folgt — durch Transitivität — $(\neg B \rightarrow B)$. Dies ist nun aber wegen $\neg(\neg A \rightarrow A)$ unmöglich, also sind $A \rightarrow B$ und $\neg A \rightarrow B$ miteinander inkonsistent. Es gilt also $\neg((A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B))$ bzw. $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)$[33].
>
> Der Hintersatz soll *stark abhängig* (kürzer: *konnex*) sein, d.h. er soll nicht ohne zuhilfenahme der Prämissen beweisbar sein. Mit anderen Worten, weder die formale noch die materiale Wahrheit des Hintersatzes soll die Prämisse(n) redundant machen. So ist $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ keine konnexe These.

---

[33] Sowohl die aristotelische $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow B)$ als auch die boethianische These $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$ können offensichtlich aus $\neg(A \rightarrow \neg A)$ bzw. $\neg(\neg A \rightarrow A)$ mit Hilfe von Kontraposition, Transitivität, Deduktionstheorem, modus tollens und doppelter Negation syntaktisch abgeleitet werden. [Siehe Rahman 1997b, II(A).4.2.2]

Wir haben hier nicht zufälligerweise den Begriff der 'Redundanz' verwendet: MacColl hat für die oben erwähnten Wahrheitsbedingungen der starken Implikation eine originelle und einfache Redundanztheorie entwickelt, auf die hier allerdings nicht eingegangen werden kann[34].

In seinen späten Schriften hat MacColl die modale Definition der strengen Implikation formuliert, die dann C. I. Lewis, der mehr von MacColls Werk übernommen hat, als er zugeben wollte, bekannt gemacht hat[35].

In seinem Buch von 1906, in dem MacColl eine systematische Darstellung seiner früheren logischen Überlegungen anstrebt, werden folgende modale Prädikatoren eingeführt: *true*, *false*, *certain*, *impossible*, *variable*. Diese modalen Prädikatoren, die gleichzeitig aus seinen logischen Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung und aus denen über die Subalternation in der Syllogistik hervorgegangen sind, machen MacColl zum Vater der formalen modalen Logik und der modernen Formulierung der strikten Implikation. Die Bedeutungen dieser modalen Prädikatoren werden durch wahrscheinlichkeitsorientierte Definitionen festgelegt [Vgl. MacColl 1906a, 6-7]:

true (τ):	"true in a particular case or instance", wahr.
false (ι):	"false in a particular case or instance", falsch.
certain (ε):,	"always true (or true in every case) within the limits of our data and definitions, that its probability is 1", gewiß, notwendigerweise wahr.
impossible (η):	"contradicts some datum or definition, [...] its probability is 0", unmöglich.
variable (θ):	"neither IMPOSSIBLE nor CERTAIN [...] POSSIBLE but UNCERTAIN", variabel, kontingenterweise wahr (θ^{τ}) bzw. falsch (θ^{ι}).

Die Definition der strikten Implikation lautet gemäß dieser Notation:

$$A \Rightarrow B \overset{df}{\Longleftrightarrow} (A \wedge \neg B)^{\eta} \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\neg(A \wedge \neg B))^{\varepsilon}$$ [Vgl. MacColl 1906a, 8]

Nun soll aber das Bikonditional $A \leftrightarrow (A \wedge B)$ nach unserer Lesart

---

[34] MacColls Redundanzbegriff wird ausführlich diskutiert in [Rahman 1997b], letzter Abschnitt des Kapitels I.2.2.2 und Kapitel II(A).3.

[35] In [Rahman 1997a], Bibliographiekapitel, wird über Lewis' Kenntnis von MacColls Werk berichtet.

von MacColl die allgemeine Form der konditionalen Aussage darstellen, die also sowohl das klassische, mit einer einschließenden Disjunktion äquivalente Wenn-Dann, als auch eine stärkere hypothetische Fassung dieses Junktors erfassen soll, wobei hier zu bemerken ist, daß 'konditionale Aussage', wie bei Hamilton, als Oberbegriff verwendet wird. In diesem Zusammenhang muß noch erörtert werden, ob MacColls Ausdruck $A=AB$ tatsächlich als Bikonditional verstanden werden darf, und wenn dies zutrifft, ob dieser Ausdruck ein klassisches oder ein nichtklassisches Bikonditional darstellt. Es muß eingeräumt werden, daß MacColls Verwendung von Gleichungen nicht immer eindeutig ist. Es gibt aber genügend Hinweise dafür, daß wenn zwei schematische Buchstaben durch das Gleichheitszeichen (=) verbunden sind, MacColl ein Bikonditional meint. Wir schlagen eine Lesart des Ausdrucks $A=AB$ vor, die mit MacColls Werk vereinbar ist: Die Gleichung $A=AB$ soll ausdrücken, daß man das Gleichheitszeichen durch das geeignete Bikonditional ersetzen muß. Im Fall des schwachen Zusammenhangs soll das Gleichheitszeichen durch ein klassisches Bikonditional ersetzt werden, im Fall des starken Wenn-Dann durch ein starkes Bikonditional. Das aber bedeutet, und dies entspricht dem Geist der Texte, daß diese Gleichung nicht eine Definition des Wenn-Dann, sondern eine notwendige Bedingung der konditionalen Aussage darstellt.

Als wir die Wahrheitsbedingungen der starken, zusammenhängenden *Hypotheticals* untersucht haben, haben wir festgehalten, daß die Gültigkeit der konnexen Thesen die mögliche Wahrheit des Antezedens voraussetzt. Dies wird auch bei MacColls Rekonstruktion der Syllogistik von jeder Prämisse, sowohl in seinen frühen als auch in seinen späten Schriften, vorausgesetzt[36].

---

[36] Vgl. [MacColl 1878a, 191, und 1906a, 44]. Vgl. auch [McCall 1963, 1964, 1966 und 1967a,b]. Besonders wichtig ist in diesem Zusammenhang sein Aufsatz [1967a]. Vgl. zudem [Astroh 1993, 1995 und 1996].

Hier muß noch angemerkt werden, daß in MacColls Rekonstruktion das syllogistische Schließen — wie übrigens fast hundert Jahre später auch bei J. Lukasiewicz [vgl. Lukasiewicz 1951, 1-18] — als Implikation definiert wird.

Daß diese Implikation auch in der Syllogistik hypothetisch verstanden werden sollte, kann man auch im Spätwerk MacColls beobachten, wo er sich um eine Unterscheidung zwischen den Begriffen der Implikation und *therefore* (und *because*) bemüht. Der Begriff *therefore* und dessen Umkehrung *because* bilden MacColls Ansicht nach einen speziellen Fall der Implikation, nämlich den Fall, in dem das Antezedens wahr ist, und können daher das syllogistische Schließen nicht beschreiben. Während das Antezedens der (konnexen) Implikation eine hypothetische (konsistente) Behauptung wiedergibt, stellt der Vordersatz eines *therefore*-Schlusses immer eine kategorische, wahre Aussage dar. MacColl legt

MacColls späte, modale Fassung der Syllogistik, in der nur strikte Wenn-Dann-Verknüpfungen vorkommen, setzt voraus, daß alle Ausdrücke (der Syllogistik) kontingent sind. Dabei unterliegen syllogistische Schlußfolgerungen keinen ontologischen, sondern implikativen Einschränkungen. So stellt in MacColls System die zweite boethianische These der Konnexität die Subalternation dar. Während z.B. das universelle Urteil

(Alle) Logiker sind Trinker

---

in diesem Zusammenhang, gegen die zu seiner Zeit übliche Auffassung, eine solche Unterscheidung gehöre zur natürlichen, nicht zur formalen Sprache, folgendes Beispiel vor:

"Startling, as it may sound, however, it is a demonstrable fact that no one syllogism, of the traditional logic — neither Darapti, nor Barbara, nor any other — is valid in the form in which it is usually presented in our text-books [...].

53. Logicians may say (as some have said), in answer to the preceding criticism, that my objection to the usual form of presenting a syllogism is purely verbal [...]. Suppose a general, whose mind, during his past university days, had been over-imbued with the traditional logic, were in war time to say, in speaking of an untried and possibly innocent prisoner, 'He is a spy; therefore he must be shot', and that this order were carried out to the letter. Could he afterwards exculpate himself by saying that it was all an unfortunate mistake, due to the deplorable ignorance of his subordinates; that if these had, like him, received the inestimable advantages of a logical education, they would have known at once that what he really meant was 'If he is a spy, he must be shot'? The argument in defence of the traditional wording of syllogisms is exactly parallel." [MaColl 1906a, 47-49]

MacColl schreibt sogar ausdrücklich:

"The therefore-form vouches for the truth of P and Q [...]; the if-form vouches only for the truth of the implication." [MacColl 1906a, 48]

Wie schon Boole [Boole 1847, 58] formuliert auch MacColl einen *therefore*-Schluß bei Kausalschlüssen mit Hilfe des modus ponens [MacColl 1897a, 55 und 1906a, 44]: In unserer Notation:

'*A therefore B*' $\overset{df}{\Longleftrightarrow} A \boldsymbol{\Downarrow} B \overset{df}{\Longleftrightarrow} A \wedge (A \boldsymbol{\rightarrow} B)$

Hier wird offensichtlich, daß während die Wahrheit von $A \boldsymbol{\Downarrow} B$ die konjunktive Zusammensetzung von A und $(A \boldsymbol{\rightarrow} B)$ erfordert, die Wahrheit von $A \boldsymbol{\rightarrow} B$ lediglich die Konsistenz von A voraussetzt. Im Spätwerk wird dies modal ausgedrückt:

'*A therefore [necessarily] B*' $\overset{df}{\Longleftrightarrow} A \circledR B \overset{df}{\Longleftrightarrow} A \wedge (A \Rightarrow B) \overset{df}{\Longleftrightarrow} A \wedge (A \wedge \neg B)^{\eta}$

[...] asserts that the statement (or collection of statements) A is true, and secondly the affirmation of A coupled whith the denial of B constitutes an impossibility." [MacColl 1906a, 80] laut MacColl für den Ausdruck

> 1 Für einen beliebigen Menschen x gilt: wenn x ein Logiker ist, dann ist x ein Trinker

steht, so steht das partikuläre Urteil

> Einige Logiker sind Trinker

für den Ausdruck

> 2 Es ist nicht der Fall, daß für einen beliebigen Menschen x gilt: wenn x ein Logiker ist, dann ist x kein Trinker.

Formal ausgedrückt:

$$1\ (a \rightarrow b)$$

$$2\ \neg(a \rightarrow \neg b),$$

wobei ein Kleinbuchstabe eine Aussage über ein arbiträres Individuum — in unserem Fall über einen beliebigen Menschen — darstellt.

Die Subalternation lautet also:

$$(a \rightarrow b) \rightarrow \neg(a \rightarrow \neg b)$$

Hier werden nicht die üblichen ontologischen Existenzforderungen an den Individuenbereich gestellt, sondern die implikativen Bedingungen, die für die Gültigkeit der zweiten boethianischen These der Konnexität erforderlich sind: Die Aussage *a* soll lediglich konsistent sein. Kurz, auch syllogistische Schlüsse erfüllen nach MacColls Ansicht die problematischen Modalitätsbedingungen der traditionellen *Hypotheticals*.

MacColl betrachtete also das starke Wenn-Dann, wie Hamilton, als die wichtigste Form der konditionalen Aussage und bemühte sich sein Leben lang, es formal zu erfassen. Unglücklich ist dabei MacColls Verwendung eines einzigen Zeichens (nämlich des Doppelpunktes) für alle seine unterschiedlichen Fassungen der Implikation. Ferner vertrat MacColl (im Gegensatz zu Boole und Venn) die Auffassung, daß auch der Annahmecharakter durch eine logische Analyse darstellbar ist, nämlich so, daß weder die Wahrheit noch die Falschheit der Teilformeln einer gültigen Implikation diese Implikation zerstören kann. Mit MacColls eigenen Worten: Die Teilaussagen einer gültigen Implikation können als bloße (sprich: noch nicht bestätigte) Behauptungen betrachtet werden. MacColl schlug sogar eine Methode vor, die die traditionelle Unterscheidung zwischen kategorischen und hypothetischen Aussagen ermöglichen sollte:

- In bezug auf die Form: Kategorische Behauptungen bzw. Aussagen sind hypothetische Aussagen, die aus zwei prädikativen, durch eine Implikation verknüpften Teilen bestehen. Die kategorischen Urteile aber unterliegen einer Beschränkung, von der die hypothetischen Aussagen im allgemeinen befreit sind: Die prädikativen Teile sollen sich auf dasselbe Subjekt beziehen.
- In bezug auf die Modalität: Kategorisch sind lediglich solche Aussagen, deren Wahrheit bzw. Falschheit material bestätigt wurde, und die nicht nur mögliche bzw. konsistente Behauptungen darstellen. In seinem Spätwerk wird er diese Unterscheidung modal formulieren.

Hier schließt sich der Kreis, in den MacColl Booleaner und Nicht-Booleaner in der Zeit der Entstehung der klassischen formalen Logik einbinden wollte, mit der Hoffnung auf eine Zusammenarbeit, deren späte Früchte erst in den letzten Jahrzehnten unseres Jahrhunderts geerntet werden konnten und noch können[37].

Literaturverzeichnis

I. Auswahl der Hauptwerke des logischen Nachlasses von Hugh MacColl

a) Die ersten logischen Schriften (1877-1893):

1877a Symbolical or abbreviated language, with an application to mathematical probability. *The Educational Times and Journal of the College of Preceptors*, Bd. 29, Heft Juli 1877, 91-92.

1877b Symbolical language: - Nr. 2. *The Educational Times and Journal of the College of Preceptors*, Bd. 29, Heft November 1877, 195.

1877c Solution [to Question Nr. 5281]. *The Educational Times and Journal of the College of Preceptors*, Bd. 29, Heft April 1877, 171.

1877d The Calculus of Equivalent Statements and Integration Limits. *Proceedings of the London Mathematical Society* (1877-1878), Bd. 9, 9-20.

1878a The Calculus of Equivalent Statements (II). *Proceedings of the London Mathematical Society*, (1877-1878), Bd. 9, 177-186.

[37] Für wichtige Anregungen und Diskussionen danken wir Herrn Helge Rückert.

1878b The Calculus of Equivalent Statements (III). *Proceedings of the London Mathematical Society*, (1878-1879), Bd. 10, 16-28.

1880a The Calculus of Equivalent Statements (IV). *Proceedings of the London Mathematical Society*, (1879-1880), Bd. 11, 113-121.

1880b Symbolical Reasoning (I). *Mind*, Bd. 5, 45-60.

1880c On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Bd. 10, 168-171.

1881a Implication and Equational Logic. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Bd. 11, 40-43.

1881b On the growth and use of a symbolical language. *Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*, Bd. 20, 103.

1882 On the Growth and Use of a Symbolical Language. *Memoirs of the Manchester Literary and Philosophical Society*, Bd. 7, 225-248.

b) Die späten Schriften (1896-1911):

1896a The Calculus of Equivalent Statements (V). *Proceedings of the London Mathematical Society*, (1896-1897), Bd. 28, 156-183.

1896b The Calculus of Equivalent Statements (VI). *Proceedings of the London Mathematical Society*, (1896-1897), Bd. 28, 555-579.

1896c [Question No.] 13234. *The Educational Times and Journal of the College of Preceptors*, Bd. 49, Heft Juli 1896, 396.

1897a Symbolic Reasoning (II). *Mind*, Bd. 6, 493-510.

1897b The Calculus of Equivalent Statements (VII). *Proceedings of the London Mathematical Society*, (1897-1898), Bd. 29, 98-109.

1897c The Calculus of Equivalent Statements (VIII). *Proceedings of the London Mathematical Society*, (1897-1898), Bd. 29, 545.

1898 The Calculus of Equivalent Statements. Explanatory Note and Correction. *Proceedings of the London Mathematical Society*, (1898-1899), Bd. 30, 330-332.

1899 A. N. Whitehead, Universal Algebra with Applications, Vol. 1. (Rezension), *Mind*, Bd. 8 (Critical notices), 108-113.

1900a Symbolic Reasoning (III). *Mind*, Bd. 9, 75-84.

1900b Questions for Logicians. *Mind*, Bd. 9, 144.

1901 La logique symbolique et ses applications. *Bibliothèque du 1er. Congrès Internat. de Philosophie*, Paris, Bd. 3, 135-183.

1901-09 Letters to Bertrand Russell 1901-1909. *Bertrand Russell Archives*, McMaster University.

1902a Logique tabulaire. *Revue de Métaphysique et de Morale*, Bd. 10, 213-217.

1902b Symbolic Reasoning (IV). *Mind*, Bd. 11, 352-368.

1903a Symbolic Reasoning (V). *Mind*, Bd. 12, 355-364.

1903b La logique symbolique. *L'Enseignement mathématique*, Bd. 5, 415-430.

1904a La logique symbolique (II). *L'Enseignement mathématique*, Bd. 6, 372-375.

1904b Symbolic Logic. *The Athenaeum*, Nr. 4007, 13.08.1904, 13-16.

1904c Symbolic Logic. *The Athenaeum*, Nr. 4027, 31.12.1904, 911.

1905a Symbolic Reasoning (VI). *Mind*, Bd. 14, 74-81; Neudruck in: [MacColl 1973a, 308-316].

1905b Symbolic Reasoning (VII). *Mind*, Bd. 14, 390-397.

1905c Existential Import. *Mind*, Bd. 14, 295-296; Neudruck in: [MacColl 1973b, 317].

1905d The Existential Import of Propositions [Reply to Bertrand Russell]. *Mind*, Bd. 14, 401-402; Neudruck in: [MacColl 1973c, 317-319].

1905e The Existential Import of Propositions. *Mind*, Bd. 14, 578-579; Neudruck in: [MacColl 1973d, 319-322].

1906a *Symbolic Logic and its Applications*. London/New York/Bombay: Longmans, Green and Co.

1906b Symbolic Reasoning (VIII). *Mind*, Bd. 15, 504-518.

1907 Symbolic Logic. A Reply. *Mind*, Bd. 16, 470-473.

1908a If and Imply. *Mind*, Bd. 17, 151-152.

1908b If and Imply. *Mind*, Bd. 17, 453-455.

1910a Linguistic Misunderstandings (I). *Mind*, Bd. 19, 186-199.

1910b Linguistic Misunderstandings (II). *Mind*, Bd. 19, 337-355.

1910-11 Kommentar zu Jourdains Darstellung von MacColls Logik. In: [Jourdain 1910-1913, 2. Fußnote, S. 236].

1973a Symbolic Reasoning (VI). In: *Essays in Analysis*. Herausgegeben von Douglas Lackey, London: George Allen and Unwin Ltd., 1973, 308-316; Neudruck von [MacColl 1905a, 74-81].

1973b Existential Import. In: *Essays in Analysis*. Herausgegeben von Douglas Lackey, London: George Allen and Unwin Ltd., 1973, 317; Neudruck von [MacColl 1905c, 295-296].

1973c The Existential Import of Propositions (Reply to chapter 4 above). In: *Essays in Analysis*. Herausgegeben von Douglas Lackey, London: George Allen and Unwin Ltd., 1973, 317-319; Neudruck von [MacColl 1905d, 401-402].

1973d The Existential Import of Propositions. In: *Essays in Analysis*. Herausgegeben von Douglas Lackey, London: George Allen and Unwin Ltd., 1973, 319-322; Neudruck von [MacColl 1905e, 578-579].

II. Weitere Literaturangaben

Aristoteles

1995 Lehre vom Schluß oder erste Analytik, übersetzt von Eugen Rolfes. In: *Aristoteles, Philosophische Schriften*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Bd. I, Kap. 3, 1-151.

Astroh, Michael

1993 Der Begriff der Implikation in einigen frühen Schriften von Hugh McColl. In: [Stelzner 1993a, 128-144].

1995a Konnexe Logik (Mannheim). Mit einem Vorwort von D. Føllesdal (in Vorbereitung).

1995b Subjekt, Prädikat und Modalität. Ein Beitrag zur logischen Rekonstruktion einer kategorischen Syllogistik, Saarbrücken: Typoskript

1996 Präsupposition und Implikatur. In: [Dascal/Gerhardus/Lorenz/Meggle 1992-96, Bd. II, 1391-1407].

Bain, Alexander

1870 *Logic*. London: Longmans, Green and Reader, 2 Bde.

Beth, Evert Willem

1968 *The foundations of mathematics*. Amsterdam: North-Holland.

Bochenski, Innocentius Maria Joseph

1956 *Formale Logik*. Freiburg/München: Alber.

Boethius, Anicius Manlius Torquatus Severinus

1969 *De hypotheticis syllogismis*. Herausgegeben, kommentiert und übersetzt von Luca Libertello, Brescia: Paideia.

Boole, George

1847 *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*. Oxford (Neudruck 1965): Basil Blackwell.

1854 *An Investigation of the Laws of Thought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. New York (Neudruck 1958): Dover Publications, Inc.

Christie, Thony

1986a Hugh McColl in der wissenschaftlichen Literatur seit 1910. In: *Arbeitsberichte der Erlanger Logikforschung* (Protokoll vom 5.2.1986).

1986b Zur Biographie Hugh MacColls. In: *Arbeitsberichte der Erlanger Logikforschung* (Protokoll vom 5.2.1986).

1986c Hugh Who?. In: *Arbeitsberichte der Erlanger Logikforschung* (Protokoll vom 5.2.1986).

1986d Zu John R. Spencers Dissertation 'The Philosophy of Logic of Hugh MacColl'. In: *Arbeitsberichte der Erlanger Logikforschung* (Protokoll vom 12.3.1986).

1989 The Logical Community in the 2nd Half of the 19th Century. Erlangen: Typoskript.

Couturat, Louis

1896 *De l'Infini Mathématique*. Paris: Germer Baillère.

1899 La Logique mathématique de M. Peano. *Revue de Métaphysique et de Morale*, Bd. 7, 616-646.

1908 *Die philosophischen Prinzipien der Mathematik*. Übersetzt von C. Siegel, Leipzig: Dr. W. Klinkhardt.

Dascal, Marcelo; Gerhardus, Dietfried; Lorenz, Kuno & Meggle, Georg (Hrsg.)

1992/96 *Sprachphilosophie, Philosophy of Language, La philosophie du langage*, Bd. I (1992), Bd. II (1996), Berlin/New York: Walter de Gruyter.

Frege, Gottlob

1879 Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. In: I. Angelelli (Hrsg.), *Gottlob Frege, Begriffssschrift und andere Aufsätze*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1964, 1-88.

1882 Über den Zweck der Begriffsschrift. In: I. Angelelli (Hrsg.), *Gottlob Frege, Begriffssschrift und andere Aufsätze*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1964, 97-105.

Grover, Dorothy; Camp, John & Belnap, Nuel Dinsmore

1975 A Prosentential Theory of Truth. *Philosophical Studies*, Bd. 27, 73-125.

Haack, Susan

1978 *Philosophy of Logics*. London/New York/usw.: Cambridge University Press.

Hacking, Ian

1975 *The Emergence of Probability. A philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference*. London: Cambridge University Press.

Hughes, George E. & Creswell, Max J.

1968 *An Introduction to Modal Logic*. London: Methuen.

Jevons, William Stanley

1864 Pure Logic or the Logic of Quality apart from Quantity. In: [1890, 1-7].

1869 On the Mechanical Performance of Logical Inference. In: [1890, 80-137].

1879 *The Principles of Science. A Treatise on Logic and Scientific Method.* London (3. Auflage - 1. Auflage 1874): Macmillan.

1881 Recent Mathematico-Logical Memoirs. *Nature*, Bd. 23, 485-487.

1890 *Pure Logic and other Minor Works.* New York (Neudruck 1971): Burt Franklin: Research & Source Works Series 773. Philosophy Monograph Series 66.

Johnson, William Ernest

1892a The Logical Calculus. I. General Principles. *Mind*, Bd. 1, 3-30.

1892b The Logical Calculus. II. *Mind*, Bd. 1, 235-357.

1918a The Analysis of Thinking. (I). *Mind*, Bd. 27, 1-21.

1918b The Analysis of Thinking. (II). *Mind*, Bd. 27, 133-151.

Jørgensen, Jörgen

1931 *A treatise of formal logic. Its evolution and main branches, with its relations to mathematics and philosophy.* New York (Neudruck 1962): Russell and Russell, 3 Bde.

Jourdain, Philip E. B.

1910-1913The development of the theories of mathematical logic and the principles of mathematics. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 41 (1910), 43 (1912), 44 (1913). 324-352, 219-314, 113-128.

Kant, Immanuel

1800 Immanuels Kant Logik, ein Handbuch zu Vorlesungen. In: Kant 1983, Bd. 5, 421-582.

1983 *Kant. Werke.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 10 Bde.

Keynes, John Neville

1906 *Studies and Exercises in Formal Logic. Including a Generalisation of Logical Processes in their Application to Complex Inferences.* London: MacMillan.

Kneale, William & Kneale, Martha

1968 *The Development of Logic.* Glasgow/New York/usw.: Oxford at the Clarendon Press, 4. Auflage (1. Auflage 1962).

Knuuttila, Simo (Hrsg.)

1988 *Modern Modalities. Studies of the History of Modal Theories from Medieval Nominalism to Logical Positivism.* Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

Ladd Franklin, Christine

1889 On Some Characteristics of Symbolic Logic. *American Journal of Psychology*, Neudruck 1966, 543-567.

1928 The Antilogism. *Mind*, Bd. 37, 532-535.

Lewis, Clarence Irving

1913 A new algebra of implications and some consequences. *Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Method*, Bd. 10, 428-438.

1914 The Calculus of Strict Implication. *Mind*, Bd. 23, 240-247.

1918 *A survey of Symbolic Logic*. Berkeley: University of California Press (Neudruck 1960, New York: Dover Publications Inc.).

1946 *An analysis of knowledge and valuation*. La Salle, Illinois: Opera Court.

1951 Notes of the logic of intension. In: Goheen J. D. & Mothershead, J. L. (Hrsg.),*Collected Papers of C. I. Lewis*, Stanford: Stanford University Press, 1970, 420-429.

Lewis, Clarence Irving & Langford, Cooper Harold

1932 *Symbolic Logic*. New York (Neudruck 1959): Dover Publications Inc.

Liard, Louis

1901 *Les logiciens anglais contemporains*. Paris (4. Auflage): Alcan.

McCall, Storrs

1963 *Aristotle's Modal Syllogisms*. Amsterdam: North-Holland.

1964 A new variety of implication. *Journal of Symbolic Logic*, Bd. 29, 151-152.

1966 Connexive implication. *Journal of Symbolic Logic*, Bd. 31, 415-432.

1967a Connexive implication and the syllogism. *Mind*, Bd. 76, 346-356.

1967b MacColl. In: P. Edwards (Hrsg.), *The Encyclopedia of Philosophy*, London: Macmillan, Bd. 4, 545-546.

Macfarlane, Alexander

1879a *Principles of the Algebra of Logic*. Edinbourgh: D. Douglas.

1879b On a Calculus of Relationship (Part I). *Proceedings of the Royal Society of Edinbourgh*, Bd. 10 (Mai), 222-232.

1880 Algebra of Relationship (Part II). *Proceedings of the Royal Society of Edinbourgh*, Bd. 11 (Dezember), 5-13.

1881 Algebra of Relationship (Part III). *Proceedings of the Royal Society of Edinbourgh*, Bd. 11 (März), 162-173.

1882 *Analysis of relationships, of consanguinity and affinity*. London: Harrison & Sonns.

1885 The Logical Spectrum. *Philosophical Magazine*, April, 286-289.

Peano, Giuseppe

1889 *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Turin: Bocca.

1897 Formole di logica matematica. *Rivista di matematica*, Bd. 1, 24-31, 181-184.

1895-1908 *Formulaire de Mathématiques*. Turin: Bocca, 5 Bde.

Peckhaus, Volker

1988 Historiographie wissenschaftlicher Disziplinen als Kombination von Problem- und Sozialgeschichtsschreibung: Formale Logik im Deutschland des ausgehenden 19. Jahrhunderts. In: Poser, H. & Burrichter, C. (Hrsg.), *Die geschichtliche Perspektive in den Disziplinen der Wissenschaftsforschung. Kolloqium an der TU Berlin*, Berlin: TU-Dokumentation Kongresse und Tagungen, Bd. 39, 177-215.

1990 *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

1993 Ernst Schröder und der Logizismus. In: Stelzner 1993a, 108-119.

1995 *Logik und Struktur, Leibniz und die Wiederentdeckung der formalen Logik im 19. Jahrhundert*. Habilitationsschrift, Erlangen: Universität Erlangen-Nürnberg.

Peirce, Charles Sanders

1965-67 *Collected Papers*. Herausgegeben von Hartshorne, C. & Weiss, P. 1965-67 (3. unveränderter Neudruck der Ausgabe von 1933), Teilband 2: *Elements of Logic* (1893-1901), Teilband 3: *Exact Logic* (1867-1911), Teilband 4: *The Simplest* und *Mathematics* (1880-1911). Cambridge MA: Harvard University Press.

Ploucquet, Gottfried

1776 *Sammlung der Schriften, welche den logischen Kalkül des Herrn Prof. Ploucquet betreffen*. Frankfurt/Leipzig: A. F. Bök; Neudruck 1970, Stuttgart: Frommann-Holzboog.

Prantl, Carl

1855 *Geschichte der Logik im Abendlande*. Leipzig: Hirzel.

Prior, Arthur Norman

1949 Categoricals and Hypotheticals in George Boole and his Successors. *The Australasian Journal of Philosophy*, Bd. 27, 171-196.

1962 *Formal Logic*. 2. Auflage, Glasgow/New York/usw.: Oxford at Clarendon Press.

Rahman, Shahid

1995 MacColl: vom Integral zur Logik, Saarbrücken: Typoskript.

1997a *Hugh MacColl - eine bibliographische Erschließung seiner Hauptwerke*. FR 5.1. Philosophie, Memo 8, Januar 1997, Saarbrücken: Universität des Saarlandes.

1997b Die Logik der zusammenhängenden Behauptungen im frühen Werk von Hugh MacColl. Saarbrücken: Habilitationsschrift.

Rescher, Nicholas

1968a *Topics in Philosophical Logic*. Dordrecht: Reidel.

1968b Can there be random individuals?. In: [1968a, 134-137].

1968c The Logic of Existence. In: [1968a, 138-160].

Russell, Bertrand

1903 *The Principles of Mathematics*. London: Allan & Unwin.

1905 The Existential Import of Propositions. *Mind*, Bd. 14, 398-401.

1906 Hugh MacColl, Symbolic Logic and Its Applications (Rezension). *Mind*, Bd. 15, 255-260.

1908 'If' and 'Imply': A reply to Mr. MacColl. *Mind*, Bd. 17, 300-301.

Schröder, Ernst

1890-95 *Vorlesungen über die Algebra der Logik*. Leipzig: B. G. Teubner, 3 Bde.: Bd. I (1890), Bd. II (1891-1905), Bd. III (1895).

Schröder-Heister, Peter

1984 McColl. In: Mittelstraß, J./usw (Hrsg.): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, Mannheim/Wien/Zürich: Bibliographisches Institut, 821-822.

Spencer, John

1972 *The Philosophy of Logic of Hugh MacColl*. Montreal: PHD-Thesis McGill University, Mikrofilmausgabe.

Stelzner, Werner

1993a *Philosophie und Logik, Frege-Kolloquien Jena 1989-1991*. Berlin/New York: Walter de Gruyter.

1993b Hugh MacColl - Ein Klassiker der nicht-klassischen Logik. In: [Stelzner 1993a, 145-154].

Venn, John

1881 *Symbolic Logic*. New York (1971 unveränderter Neudruck der 2. Auflage 1894): Chelsea Publishing Company.