Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

von László Fuchs

Tensorsches Produkt Abelscher Gruppen

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, n° 2 (1958-1959), exp. n° 26, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_2_A9_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1958/59
-:-:-:-

5 mai 1959

TENSORSCHES PRODUKT ABELSCHER GRUPPEN

von László FUCHS.

Es seien A , B , C beliebige Gruppen, deren Operationen wir als Addition schreiben (ohne die Kommutativität vorauszusetzen). Eine für alle $a \in A$ und für alle $b \in B$ erklärte Funktion $f(a , b)$ mit Werten aus C heisst eine <u>bilineare Funktion</u> von A , B in C , falls sie den Bedingungen

$$f(a + a' , b) = f(a , b) + f(a' , b) , \qquad f(a , b + b') = f(a , b) + f(a , b')$$

für alle a , $a' \in A$ und b , $b' \in B$ genügt. Die Funktionswerte $f(a , b)$ sind in C stets vertauschbar, da aus

$$\begin{aligned} f(a + a' , b + b') &= f(a , b + b') + f(a' , b + b') \\ &= f(a , b) + f(a , b') + f(a' , b) + f(a' , b') \\ &= f(a + a' , b) + f(a + a' , b') \\ &= f(a , b) + f(a' , b) + f(a , b') + f(a' , b') \end{aligned}$$

die Gleichung $f(a , b') + f(a' , b) = f(a' , b) + f(a , b')$ folgt ($\forall a , a' \in A ; b , b' \in B$) . Wir können also schon im vorhinein voraussetzen, dass die Gruppe C kommutativ ist. Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} f(- a - a' + a + a' , b) &= f(- a , b) + f(- a' , b) + f(a , b) + f(a' , b) \\ &= - f(a , b) + f(a , b) - f(a' , b) + f(a' , b) = 0 \end{aligned}$$

das heisst (d. h.) $f(a , b)$ verschwindet, falls a zu der Kommutatoruntergruppe K von A beziehungsweise (bzw.) b zu der Kommutatoruntergruppe L von B gehört. Somit hängt $f(a , b)$ nur von der Nebenklasse von a mod K und von der Nebenklasse b mod L ab , folglich können wir $f(a , b)$ als eine auf den Faktorgruppen A/K und B/L erklärte Funktion auffassen. Wir sehen also, dass wir, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, voraussetzen können, dass die Gruppen A , B , C abelsch sind. Dementsprechend werden wir im folgenden nur <u>abelsche</u> Gruppen betrachten.

Sind A, B zwei gegebene Gruppen, so kann man die "allgemeinste" bilineare Funktion von A, B erklären. Es sei X die durch alle Paare (a, b) $(a \in A, b \in B)$ erzeugte freie abelsche Gruppe ([1]) und Y die durch die Elemente der Form

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b), \qquad (a, b + b') - (a, b) - (a, b')$$

erzeugte Untergruppe. Das tensorsche Produkt (oder das freie bilineare Produkt) von A, B ist als die Faktorgruppe $A \otimes B = X/Y$ definiert. Bezeichnet man mit $a \otimes b$ die das Paar enthaltende Nebenklasse von X, so sind die Elemente von $A \otimes B$ endliche Summen von der Form

$$\sum k_i (a_i \otimes b_i) \qquad (k_i = \text{ganz rational}) \quad (^2)$$

mit den Rechnungsregeln

$$(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b, \quad a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b' .$$

Aus der Definition von $A \otimes B$ ist klar, dass zu einer beliebigen bilinearen Funktion $f(a, b)$ von A, B in irgendeine Gruppe C ein Homomorphismus η von $A \otimes B$ in C existiert mit der Eigenschaft

$$(a \otimes b)\eta = f(a, b)$$

D. h. jede bilineare Funktion von A, B ist ein homomorphes Bild der "freien" bilinearen Funktion $g(a, b) = a \otimes b$ von A, B in $A \otimes B$.

Aus der Definition des tensorschen Produktes erhält man die folgenden einfachen Eigenschaften ([3]):

1° Ist A die durch das Element a erzeugte unendliche zyklische Gruppe, so lässt sich jedes Element von $A \otimes B$ in der eindeutigen Form $a \otimes b$ mit irgendeinem $b \in B$ darstellen, und die Abbildung $b \to a \otimes b$ ist ein Isomorphismus zwischen B und $A \otimes B$; $A \otimes B \cong B$.

---

(1) X besteht also aus allen endlichen Summen $\sum k_i (a_i, b_i)$ mit ganzrationalen k_i, wo die Gleichheit und Addition formalerweise definiert ist.

(2) Es sei bemerkt, dass die k_i weggelassen werden können, da z. B. für ein positives k gilt $k(a \otimes b) = a \otimes b + \dots + a \otimes b = (ka) \otimes b = a' \otimes b$ (mit $a' \in A$) oder auch $k(a \otimes b) = a \otimes (kb) = a \otimes b'$ (mit $b' \in B$).

(3) Der Begriff des tensorschen Produktes von Gruppen rührt von H. WHITNEY (1938) her. Er und später J. DIEUDONNÉ haben mehrere Eigenschaften des tensorschen Produktes bestätigt. Neuerdings spielen die tensorschen Produkte von Moduln eine wichtige Rolle in der homologischen Algebra.

2° Ist A die durch a erzeugte zyklische Gruppe von endlicher Ordnung n, so ist die Abbildung $b \to a \otimes b$ von B auf $A \otimes B$ ein Homomorphismus, dessen Kern die Untergruppe nB [bestehend aus den n-fachen der Elemente von B] ist; $A \otimes B \cong B/nB$. Insbesondere ist das tensorsche Produkt zweier endlicher zyklischer Gruppen enbenfalls eine endliche zyklische Gruppe.

3° Für beliebige Gruppen A, B induziert die Abbildung $a \otimes b \to b \otimes a$ einen (natürlichen) Isomorphismus zwischen $A \otimes B$ und $B \otimes A$.

4° Ist A die direkte Summe ihrer Untergruppen A_λ [wo λ eine gewisse Indexmenge Λ von beliebiger Mächtigkeit durchläuft], so ist $A \otimes B$ der direkten Summe der Gruppen $A_\lambda \otimes B$ isomorph.

5° Ist C eine Untergruppe von A und D eine Untergruppe von B, so erseugen in $A \otimes B$ die Elemente von der Form $c \otimes d$ ($c \in C$, $d \in D$) eine Untergruppe E. Vergleicht man das tensorsche Produkt $C \otimes D$ mit dieser Gruppe E, so sieht man sofort, dass die natürliche Abbildung $c \otimes_1 d \to c \otimes d$ [hier bezeichnet $c \otimes_1 d$ ein Element von $C \otimes D$] einen Homomorphismus von $C \otimes D$ auf E induziert, der i. a. kein Isomorphismus ist. Unter Umständen ist aber diese Abbildung ein Isomorphismus, und zwar ist dies der Fall, wenn

a. C eine Servanzuntergruppe (4) (= reine Untergruppe) von A und D eine Servanzuntergruppe von B ist, oder

b. entweder A oder B eine torsionsfreie Gruppe (5) ist.

6° Ist wiederum C eine Untergruppe von A und D eine Untergruppe von B, so ist das tensorsche Produkt $A/C \otimes B/D$ der Faktorgruppen A/C, B/D eine Faktorgruppe von $A \otimes B$:

$$A/C \otimes B/D \cong (A \otimes B)/\,\Gamma(C\,,\,D) \quad .$$

Hier bezeichnet $\Gamma(C, D)$ diejenige Untergruppe von $A \otimes B$, die durch alle Element der Form $a \otimes d$ ($a \in A$, $d \in D$) und $c \otimes b$ ($c \in C$, $b \in B$) erzeugt wird.

---

(4) C heisst eine Servanzuntergruppe von A, wenn aus der Lösbarkeit der Gleichung $nx = c$ ($c \in C$ und n eine natürliche Zahl) mit einem $x \in A$ folgt, dass diese eine Lösung auch in C besitzt.

(5) Eine Gruppe heisst torsionsfrei, wenn sie ausser dem neutralen Element 0 kein Element von endlicher Ordnung enthält. Sind alle Elemente von endlicher bzw. Primzahlpotenzordnung, so nennen wir die Gruppe eine Torsions- bzw. eine p-Gruppe.

7° a. Aus $n|a$ und $m|b$ folgt $nm|a \otimes b$ [6].

b. Aus $na = 0$ und $mb = 0$ folgt $(n, m)(a \otimes b) = 0$.

c. Aus $n|a$ und $nb = 0$ folgt $a \otimes b = 0$.

[Die Beweise sind sehr einfach. Z. B. beweisen wir (c) : ist $x \in A$ ein Element mit $nx = a$, so gilt $a \otimes b = nx \otimes b = n(x \otimes b) = x \otimes nb = x \otimes 0 = 0$].

Nun wenden wir uns dem Problem zu, die Struktur des tensorschen Produktes von zwei gegebenen Gruppen zu bestimmen. Der einfachste Fall ist, wenn die Gruppen Torsionsgruppen sind. Dann gilt :

SATZ 1. - <u>Das tensorsche Produkt</u> $A \otimes B$ <u>von zwei Torsionsgruppen</u> A <u>und</u> B <u>ist die direkte Summe endlicher zyklischer Gruppen.</u>

Der Beweis ist ziemlich einfach. Da sich eine Torsionsgruppe als die direkte Summe von p-Gruppen darstellen lässt, folgt aus 4°, dass wir uns auf den Fall von p-Gruppen beschränken können. Ist A eine p-Gruppe und B eine q-Gruppe mit verschiedenen Primzahlen p und q, so ist $A \otimes B = 0$ wegen 7° (c). Nun seien A und B p-Gruppen (mit demselben p) und C, D ihre Basisuntergruppen [7]. Nach 5° können wir $C \otimes D$ als eine Untergruppe von $A \otimes B$ betrachten Ist $a \otimes b$ eine beliebige Erzeugende von $A \otimes B$ und ist z. B. $p^k b = 0$, so nehmen wir ein $x \in A$ mit $p^k x = a - c$ für ein passendes $c \in C$. Ist $p^j c = 0$, so wählen wir ein $y \in B$ mit $p^j y = b - d$ für ein $d \in D$. Dann gilt

$$a \otimes b = (p^k x + c) \otimes b = p^k x \otimes b + c \otimes b = x \otimes p^k b + c \times (p^j y + d)$$
$$= p^j c \otimes y + c \otimes d = c \otimes d \in C \otimes D ,$$

d. h. $C \otimes D$ stimmt mit $A \otimes B$ überein. Da C, D direkte Summen von zyklischen Gruppen sind, folgt aus 4° und 2° die Behauptung unmittelbar.

Es ist auch nicht schwer, den Fall zu erledigen, wenn A eine Torsionsgruppe und B torsionsfrei ist. Auch jetzt genügt es, nur den Fall von p-Gruppen A zu betrachten :

---

(6) n und m bezeichnen natürliche Zahlen und $n|a$ bedeutet die Lösbarkeit der Gleichung $nx = a$.

(7) C besitzt also die Eigenschaften : 1. sie ist direkte Summe von zyklischen Gruppen ; 2. sie ist eine ~~Servanzuntergruppe von A~~, und 3. die Faktorgruppe A/C ist vollständig in dem Sinne, dass für jedes $a \in A/C$ und jede natürliche Zahl n die Gleichung $nx = a$ mit einem $x \in A/C$ lösbar ist. Jede p-Gruppe enthält eine Basisuntergruppe (KULIKOV).

SATZ 2. - Ist A eine p-Gruppe und B eine torsionsfreie Gruppe, so gilt

$$A \otimes B \cong \sum_{\mathfrak{r}} A$$

[also die direkte Summe von $\mathfrak{r}$ Exemplaren der Gruppe A], wo die Kardinalzahl $\mathfrak{r}$ die Anzahl der direkten Summanden $C(p)$ in der Zerlegung $B/pB \cong \sum C(p)$ bezeichnet (8)

Neulich ist es mir gelungen, die Struktur des tensorschen Produktes aufzuklären unter der einzigen Voraussetzung, dass einer der Faktoren eine Torsionsgruppe ist. Es gilt nämlich :

SATZ 3. - Ist A eine Torsionsgruppe und B eine beliebige Gruppe, so gilt (9)

$$A \otimes B \cong A \otimes T + A \otimes (B/T) \quad ,$$

wo T die maximale Torsionsuntergruppe von B bezeichnet.

Zum Beweis wird folgendes gezeigt, woraus alle drei Sätze 1-3 unmittelbar folgen :

SATZ 4. - Es sei A eine p-Gruppe und B eine beliebige Gruppe, deren maximale Torsionsuntergruppe T eine p-Gruppe ist (mit derselben Primzahl p). Ist $C = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{m}_i} C(p^i)$ eine Basisuntergruppe von T, ist ferner $B^*/pB^* \cong \sum_{\mathfrak{r}} C(p)$ [wo $B^* = B/T$], so ist

$$A \otimes B \cong \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{m}_i} A/p^i A + \sum_{\mathfrak{r}} A \quad .$$

Bilden die Elemente b_λ $(\lambda \in \Lambda)$ eine Basis von C und die Nebenklassen c^*_μ $(\mu \in M)$ eine Basis von B^*/pB^*, so bilden die Elemente b_λ, c_μ $(\lambda \in \Lambda, \mu \in M)$ eine Basis von B mod $p^i B$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wo $c_\mu \in B$ ein beliebiges Element der Nebenklasse c^*_μ bedeutet. Ist nun ein (willkürliches) Element $b \in B$ durch jede Potenz von p teilbar, so verschwindet $a \otimes b$ nach 7° (c) für jedes $a \in A$. Ist aber $b \in p^k B$, $\notin p^{k+1} B$, so können wir für jedes $h > k$ schreiben :

$$b = m_1 b_1 + \ldots + m_r b_r + n_1 c_1 + \ldots + n_s c_s + p^h b' \quad ,$$

mit ganzen m, n und mit $b' \in B$. Ist nun $p^h a = 0$, so besteht :

---

(8) Mit $C(n)$ bezeichnen wir die zyklische Gruppe der Ordnung n.

(9) Das Zeichen $+$ zwischen Gruppen bedeutet direkte Summe.

$$a \otimes b = \sum (a \otimes n_i\, b_i) + \sum (a \otimes n_j\, c_j) + a \otimes p^h\, b'$$

$$= \sum (n_i\, a \otimes b_i) + \sum (n_j\, a \otimes c_j) \ .$$

Dies zeigt, dass jedes Element von $A \otimes B$ von der folgenden Form ist :

$$\sum (a_i \otimes b_i) + \sum (a_j' \otimes c_j) \ ,$$

wo a_i , a_j' beliebige Elemente aus A und b_i , c_j Elemente aus dem festen System b_λ , c_μ bedeuten. Es lässt sich leicht zeigen, dass ein Element von $A \otimes B$ nur dann verschwindet, wenn alle $a_i \otimes b_i$, $a_j' \otimes c_j$ verschwinden. Daraus schliessen wir, dass ein (natürlicher) Isomorphismus [10]

$$A \otimes B \cong \sum_\lambda (A \otimes \{b_\lambda\}) + \sum_\mu (A \otimes \{c_\mu\})$$

gilt. Aus 1° und 2° ergibt sich unmittelbar die Behauptung des Satzes.

Für beliebige Gruppen A , B ist die Struktur von $A \otimes B$ noch nicht bekannt. Die Schwierigkeit liegt in torsionsfreien Fall, es ist nämlich nichts Wesentliches bezüglich der Struktur des tensorschen Produktes von zwei trosionsfreien Gruppen bekannt. Dies hängt vermutlich mit der Tatsache zusammen, dass kein vernünftiges Invariantensystem für torsionsfreie Gruppen bekannt ist. Es ist leicht ein Erzeugendensystem für $A \otimes B$ (bei beliebigen A , B) mittels der Erzeugendensysteme von A und B anzugeben, dies hilft aber gar nichts in der Beschreibung der Struktur von $A \otimes B$.

Zum Schluss sei erwähnt : es ist nicht schwer, die Struktur der maximalen Torsionsuntergruppe eines beliebigen tensorschen Produktes anzugeben :

SATZ 5. - Für beliebige Gruppen A und B gilt :

$$T(A \otimes B) \cong T(A) \otimes T(B) + T(A) \otimes [B/T(B)] + [A/T(A)] \otimes T(B) \ ,$$

wo $T(G)$ die maximale Torsionsuntergruppe der Gruppe G bezeichnet.

Der Beweis läuft ähnlich wie bei Satz 4.

---

[10] $\{g\}$ bezeichnet die durch das Element g erzeugte zyklische Gruppe.