1.3. Teilsummenfolgen, Reihen

1.3.1. Teilsummen von AF

1) Beispiel:

Wie gross ist die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100: $1 + 2 + 3 + ... + 100 = ?$
Eine Anekdote besagt, dass damals ein Lehrer sich eine ruhige Lektion gönnen wollte und diese Aufgabe den Schülern erteilte. Der Lehrer hatte Pech, weil in dieser Klasse ein begabter Schüler (der spätere grosse Mathematiker Gauss) sass. Noch bevor der Lehrer es sich an seinem Pult gemütlich machen konnte, kam der kleine Gauss nach vorne und zeigte dem Lehrer das Ergebnis.

Gesucht ist also ....

Gauss löste das Problem so:

....

2) Beispiel: (Teilsummenfolge einer AF)

Gegeben ist die AF 1, 4, 7, 10, 13, ...
Wie gross ist die Summe der ersten 20 Folgenglieder?

....

....

3) Die allg. Formel für die Teilsummen einer AF:

Gegeben sei eine AF (a_n): a_1, a_2, a_3, ... a_n.
Bezeichne mit $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ die Summe der ersten n Folgenglieder. Man sagt dafür auch Teilsumme. Wie gross ist die Teilsumme s_n?

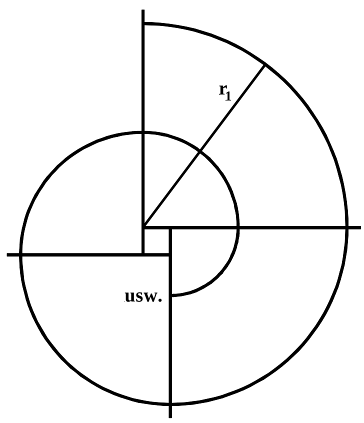
Auf Grund des obigen Beispiels vermuten wir: ....
Den Beweis dazu notieren wir separat.

4) Grundaufgaben:

a) Eine AF aus 16 Folgengliedern beginnt mit 4 und endet mit 7. Wie gross ist die Summe aller Folgenglieder?
b) Wie gross ist die Summe $5 + 9 + 13 + 17 + ... + 101$?
c) Von einer AF kennt man $a_1 = 3$ und $s_5 = 20$. Wie gross ist a_5?
d) Eine AF beginnt mit 50, 46, ... Wie viele Folgenglieder muss man summieren, damit man 240 erhält?

5) Beispiel: (Anwendung)

In der Figur rechts hat das kleine Quadrat in der Mitte Seitenlänge 2 cm und der erste Radius r_1 beträgt 25 cm. Die Spirale endet, wenn der letzte Viertelskreis auf eine Seite des kleinen Quadrates in der Mitte trifft. Wie lang ist die Spirale?
(Die Skizze ist nicht massstäblich.)



1.3.2. Teilsummen von GF

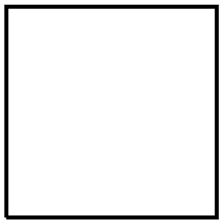
1) Beispiel:
Eine GF beginnt mit 3, 6, 12, 24, 48, ...
Gesucht ist die Summe s_{10} der ersten 10 Folgenglieder.

2) Formel und Beweis:
Gegeben sei eine GF (a_n): a_1, a_2, a_3, ... a_n. Wie gross ist die Teilsumme s_n?

Es gilt: $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ Den Beweis dazu notieren wir separat.

3) Grundaufgaben:
a) Jetzt können wir die Aufgabe 1 mit der Formel lösen.
b) Gegeben sei die GF 2, 3, ... Wie gross ist die Teilsumme s_8 ?
c) Eine GF aus 13 Folgengliedern beginnt mit 1000 und endet mit 2000. Wie gross ist die Summe ihrer Folgenglieder?
d) Von einer GF kennt man $a_1 = 9$ und $s_3 = 7$. Wie gross sind a_2 und a_3?
e) Wie viele Folgenglieder der GF 1, 1.1, ... muss man summieren, um mehr als 1000 zu erhalten?

4) Beispiele:
a) Eine GF beginnt mit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ... Wie gross ist s_8?
b) Wie viele Folgenglieder der GF $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ...
muss man summieren, um mehr als 1 zu erhalten?
Zu dieser Aufgabe eine schöne Illustration:



c) Was vermutest du: Kann man mit den Teilsummen der GF 162, 54, 18, 6, 2, ... jede (obere) Grenze überschreiten?
d) Eine GF beginnt mit 1, –0.9, ... Hat die Teilsummenfolge (s_n) einen Grenzwert?
e) Und wie steht es mit der GF 1, 1.1, 1.21, ... : Hat hier (s_n) einen Grenzwert?

5) Geometrische Reihe:
Gegeben sei eine GF: a_1, $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$, ...

Wenn ...., dann existiert ....

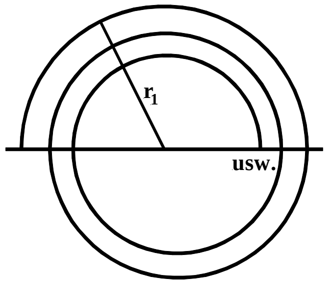
und es gilt ....
Die Begründungen notieren wir separat:
a) Mit der Formel für s_n.
b) Indem man den Beweis für die Formel für s_n nochmals "durchspielt".

6) Uebungen:
a) Eine GF beginnt mit $a_1 = 1$. Weiter kennt man die Summe aller Folgenglieder s = 5. Wie gross ist q?
b) Von einer GF mit Quotienten q = 0.3 kennt man s = 10. Wie gross ist a_1?
c) Von einer GF kennt man die Summe der ersten 3 Folgenglieder: 26 und die Summe aller restlichen Folgenglieder: 1. Wie lauten die ersten 3 Folgenglieder?
d) Eine GF beginnt mit 100, –99, ... Wie gross ist die Summe aller Folgenglieder?

7) Anwendung:

Die Spirale in der Figur rechts bestehe aus 10 Halbkreisen, deren Radien eine GF bilden. Die ersten Radien betragen r_1 = 25 cm und r_2 = 20 cm.

a) Wie lang wird die Spirale?
b) Ein Käfer wandert entlang der Spirale (von aussen nach innen). Auf welchem Halbkreis befindet er sich, wenn er genau 3 Meter zurückgelegt hat?
c) Wie lang kann diese Spirale (theoretisch) werden, wenn man sie aus unendlich vielen Halbkreisen zusammensetzt?

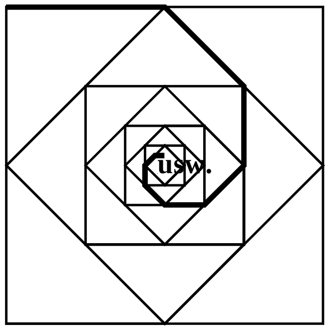


8) Ersparnisse:

Mr. X zahlt während 10 Jahren zu Beginn jedes Jahres einen Betrag von 1000 Fr. auf ein Konto. Welchen Betrag hat er am Ende des 10. Jahres auf seinem Konto, wenn der Zinsfuss für den ganzen Zeitraum 2% beträgt?

9) Anwendung:

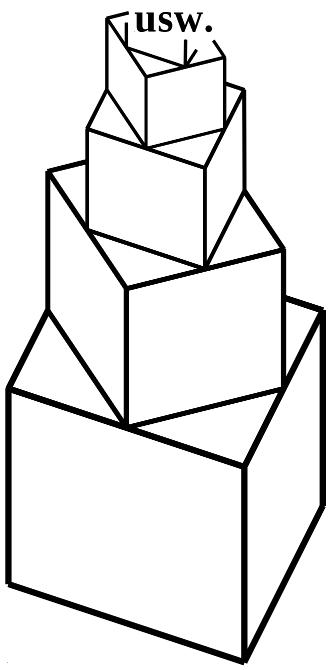
In der Figur rechts hat das grösste Quadrat Seitenlänge 10 cm. Die Mittelpunkte jedes Quadrates sind Eckpunkte des nächsten Quadrates. Wie lang ist der skizzierte Weg?
(Der Weg sei aus unendlich vielen, immer kleineren, Teilstrecken zusammengesetzt)



10) Anwendung: (Würfelturm)

Betrachte den aus unendlich vielen Würfelchen zusammengesetzten Turm. Die Kantenmittelpunkte in der Deckfläche jedes Würfelchens sind gleichzeitig Eckpunkte der Grundfläche des darüberliegenden Würfelchens. Die Kantenlänge des untersten Würfels beträgt 10 cm.

a) Wie hoch wird der Turm?
b) Berechne das Volumen und die Oberfläche des Turms?
c) Der Turm wird in 30 cm Höhe parallel zur Bodenfläche abgeschnitten. Der wievielte Würfel (von unten gezählt) wird entzweigeschnitten?
d) Zum Schluss verändern wir die Grösse des Turms: Wie gross darf die Kantenlänge des untersten Würfels werden, damit der Turm nicht höher wird als einen Meter?



Freiwillige Übung

11) Knacknuss: (Aus einer Maturprüfung)

Der Würfelturm aus obiger Aufgabe, mit 10 cm Kantenlänge des untersten Würfels, soll in zwei volumengleiche Hälften zerschnitten werden. Welcher Würfel wird zerschnitten und in welcher Höhe über dem Boden hat der Schnitt zu erfolgen?

1.3.3. Allgemeine Teilsummen von Folgen

1) Theoretische Bemerkungen:

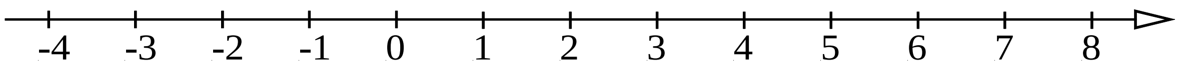
a) Die Teilsummenfolge (s_n) einer beliebigen Folge (a_n) kann man immer bilden. Es ist nur so, dass es je nach Folge schwierig sein kann, für s_n eine Formel zu finden. Wir haben genau zwei Formeln kennen gelernt, nämlich für die Teilsummen von AF und GF.

b) Aus dem vorigen Kapitel ist bekannt, dass man die Folgenglieder einer GF ins Unendliche aufsummieren kann, wenn $|q| < 1$, weil dann der Grenzwert der Teilsummenfolge $s = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n)$ existiert.

c) Wir verallgemeinern: Eine (beliebige) Folge (a_n) heisst summierbar, wenn der Grenzwert der Teilsummenfolge (s_n) existiert.
Eine GF ist also summierbar, wenn $|q| < 1$ ist. Oder anders formuliert: Eine GF ist summierbar, wenn sie Nullfolge ist.

2) Behauptung:

Damit eine Folge summierbar sein kann, muss sie Nullfolge sein.
Begründung mit einer Illustration an einem Zahlenstrahl:



Damit $s = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n)$ existiert, ...

....

3) Folgerungen:

Wenn eine Folge nicht Nullfolge ist, dann kann sie nicht summierbar sein.

Vorsicht: Es ist vorerst *nicht* klar, ob jede Nullfolge summierbar ist. Klar ist nur, dass eine summierbare Folge Nullfolge sein muss, und dass eine Folge, die keine Nullfolge ist, nicht summierbar sein kann.

4) Die harmonische Folge:

Die harmonische Folge ist definiert durch $h_n = \frac{1}{n}$.

a) Ist sie Nullfolge?

b) Ist sie summierbar?