Schwingungslehre 2

- Freie Schwingungen gekoppelter Systeme
- Erzwungene Schwingungen gekoppelter Systeme
- Freie Schwingungen kontinuierlicher Schwinger
- Aufgaben
- Anhang

Peter Junglas 2. 3. 2010

Inhaltsverzeichnis

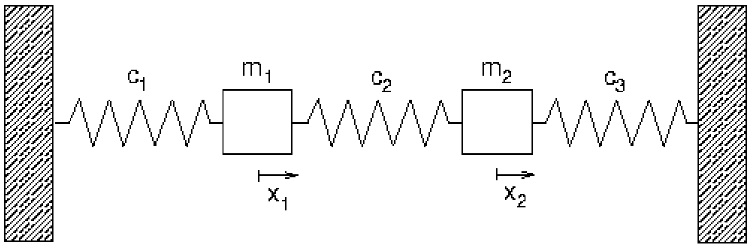
Übersicht

Freie Schwingungen gekoppelter Systeme

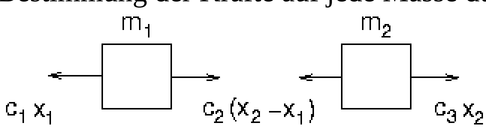
- Beispiele gekoppelter Systeme
- Systeme mit zwei Freiheitsgraden
- Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden
- Gedämpfte Schwingungen

Beispiele gekoppelter Systeme

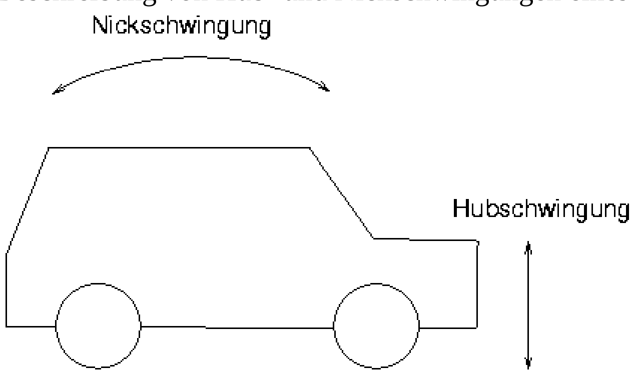
- Schwingerkette:
  - mehrere Massen-Feder-Systeme hintereinander



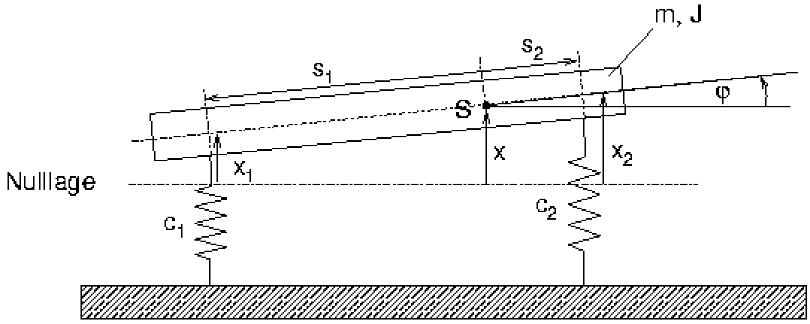
  - statisches Gleichgewicht bei $x_1 = x_2 = 0$
    - statische Kräfte (Federvorspannungen) tauchen in Bewegungsgleichung nicht auf
    - gilt auch für Gewichtskräfte → identische Gleichungen bei senkrechter Anordnung der Massen
  - Bestimmung der Kräfte auf jede Masse durch Freischneiden



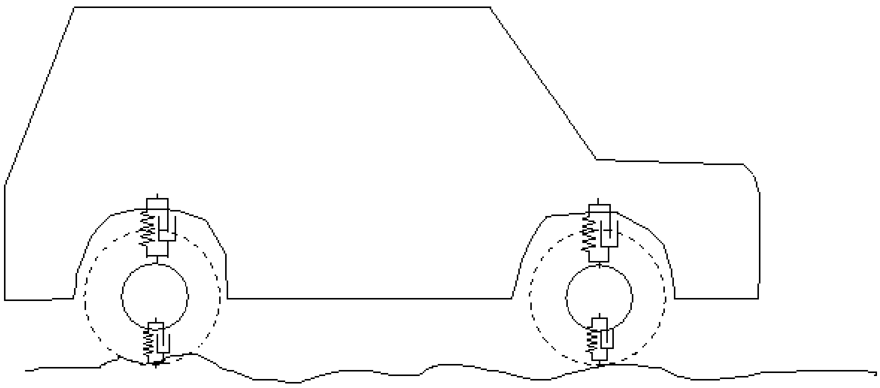
  - Bewegungsgleichungen aus Kräftegleichgewicht
    - $$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -c_2(x_2 - x_1) - c_3x_2 \end{aligned}$$
  - grundlegende Darstellungsform
    - $$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2x_2 &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2x_1 + (c_2 + c_3)x_2 &= 0 \end{aligned}$$
  - Kopplung der Gleichungen durch die Federkräfte
- Starrer Körper auf zwei Federn:
  - Beschreibung von Hub- und Nickschwingungen eines Kraftfahrzeugs



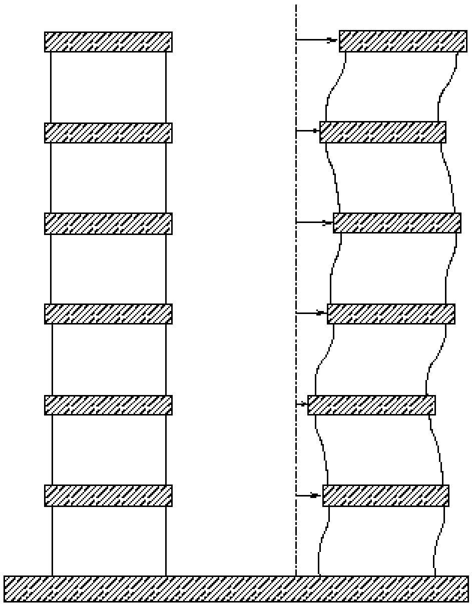
  - Ersatzsystem: starrer Körper mit Schwerpunkt S, Tragheitsmoment J



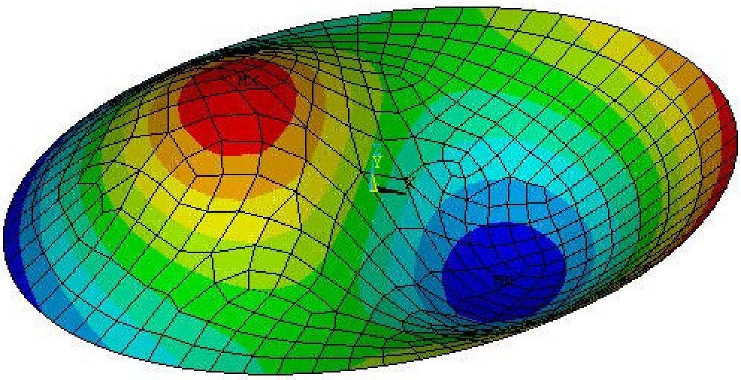
- ○ Ruhelage:
  - $x_1 = x_2 = 0$
  - bzw.
  - $x = \phi = 0$
- ○ Kraft- und Momentenbilanz bzgl. S →
  - $$\begin{aligned} -c_1 x_1 - c_2 x_2 &= m\ddot{x} \\ c_1 s_1 x_1 - c_2 s_2 x_2 &= J\ddot{\varphi} \end{aligned}$$
- ○ bei kleinen Auslenkungen gilt
  - $$\begin{aligned} x_1 &= x - s_1\varphi \\ x_2 &= x + s_2\varphi \end{aligned}$$
- ○ Einsetzen liefert die Bewegungsgleichungen in x und ϕ
  - $$\begin{aligned} m\ddot{x} + (c_1 + c_2)x + (c_2 s_2 - c_1 s_1)\varphi &= 0 \\ J\ddot{\varphi} + (c_2 s_2 - c_1 s_1)x + (c_1 s_1^2 + c_2 s_2^2)\varphi &= 0 \end{aligned}$$
  - Kopplung der Gleichungen durch die Federkräfte
- ○ Stattdessen erst x_1 und x_2 isolieren, dann x und ϕ eliminieren ergibt
  - $$\begin{aligned} (J + m s_2^2)\ddot{x}_1 - (J - m s_1 s_2)\ddot{x}_2 + (s_1 + s_2)^2 c_1 x_1 &= 0 \\ -(J - m s_1 s_2)\ddot{x}_1 + (J + m s_1^2)\ddot{x}_2 + (s_1 + s_2)^2 c_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$
  - Kopplung der Gleichungen durch die Beschleunigungsterme
- Kompliziertere Beispiele:
  - ○ Auto mit Berücksichtigung der Radkästen



- Biegeschwingungen eines Hochhauses



- Finite-Elemente-Modell eines Werkstücks



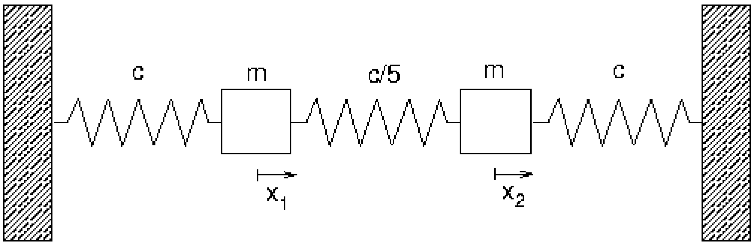
- Aufgaben:
  - Aufgabe 1
  - Aufgabe 2

Systeme mit zwei Freiheitsgraden

- Lösung der Bewegungsgleichungen am Beispiel
- Entkopplung der Bewegungsgleichungen
- Anfangsbedingungen

Lösung der Bewegungsgleichungen am Beispiel

- Standardbeispiel:
  - Masse-Feder-System mit kleiner Kopplungsfeder



  - Bewegungsgleichungen in Standardform mit Abkürzung $\omega_0{}^2 = c/m$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{6}{5}\omega_0^2 x_1 - \frac{1}{5}\omega_0^2 x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 - \frac{1}{5}\omega_0^2 x_1 + \frac{6}{5}\omega_0^2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Bestimmung der Eigenfrequenzen:
  - Lösungsansatz
    - $x_i = \hat{x}_i e^{j\omega t}, \qquad i = 1, 2$
    - mit unbekannten Werten für ω, $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$
  - Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} (\frac{6}{5}\omega_0^2 - \omega^2)\hat{x}_1 - \frac{1}{5}\omega_0^2 \hat{x}_2 &= 0 \\ -\frac{1}{5}\omega_0^2 \hat{x}_1 + (\frac{6}{5}\omega_0^2 - \omega^2)\hat{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

  - homogenes Gleichungssystem für $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$
  - nichttriviale Lösung ⇔ Determinante verschwindet

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \frac{6}{5}\omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{1}{5}\omega_0^2 \\ -\frac{1}{5}\omega_0^2 & \frac{6}{5}\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

  - Ausrechnen der Determinante liefert quadratische Gleichung für ω^2 (charakteristische Gleichung)

$$\left(\frac{6}{5}\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 - \frac{1}{25}\omega_0^4 = 0$$

  - Auflösen nach ω^2 ergibt zwei (positive) Lösungen (Eigenfrequenzen)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{7}{5}}\omega_0 \end{aligned}$$

- Berechnung der Eigenschwingungen:

- 1. Eigenschwingung für $\omega = \omega_1$
- ω_1 in homogenes Gleichungssystem einsetzen $\rightarrow$
  - $$\begin{aligned} \frac{1}{5}\omega_0^2\hat{x}_1 - \frac{1}{5}\omega_0^2\hat{x}_2 &= 0 \\ -\frac{1}{5}\omega_0^2\hat{x}_1 + \frac{1}{5}\omega_0^2\hat{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$
- nur eine Gleichung bleibt übrig
  - $\hat{x}_1 - \hat{x}_2 = 0$
- Lösung nicht eindeutig, eine Wahlmöglichkeit, normalerweise
  - $$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \hat{x}_1 &= 1 \\ \hat{x}_2 &= 1 \end{aligned}$$
- Lösung daher
  - $$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{j\omega_0 t} \\ x_2(t) &= e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$
- allgemeinere Lösung durch beliebige Linearkombination von Real- und Imaginärteil
  - $$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2(t) &= A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \end{aligned}$$
- 2. Eigenschwingung für $\omega = \omega_2$ analog $\rightarrow$
  - $$\begin{aligned} x_1(t) &= A_2 \cos(\sqrt{\frac{7}{5}}\omega_0 t + \varphi_2) \\ x_2(t) &= -A_2 \cos(\sqrt{\frac{7}{5}}\omega_0 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

- Interpretation der Eigenschwingungen
  - 1. Eigenschwingung
    - beide Massen schwingen im Takt mit gleicher Amplitude
    - mittlere (Kopplungs-)Feder entspannt
    - Frequenz = Eigenfrequenz ohne Kopplung
  - 2. Eigenschwingung
    - Massen schwingen mit gleicher Amplitude gegeneinander
    - Kraft durch Kopplungsfeder $\rightarrow$ höhere Eigenfrequenz

Entkopplung der Bewegungsgleichungen

- Entkopplung im Standardbeispiel:
  - Idee: Einführung geeigneter Koordinaten lässt alle Kopplungsterme verschwinden
  - Bewegungsgleichungen waren
    - $$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{6}{5}\omega_0^2 x_1 - \frac{1}{5}\omega_0^2 x_2 &= 0 \qquad (I) \\ \ddot{x}_2 - \frac{1}{5}\omega_0^2 x_1 + \frac{6}{5}\omega_0^2 x_2 &= 0 \qquad (II) \end{aligned}$$
  - Kombination (- I - II) ergibt
    - $$-(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) - \omega_0^2(x_1 + x_2) = 0$$
  - analog liefert (I - II)
    - $$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \frac{7}{5}\omega_0^2(x_1 - x_2) = 0$$
  - Einführung neuer Koordinaten (Hauptkoordinaten)
    - $$\begin{aligned} y_1 &= -(x_1 + x_2) \\ y_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$
  - damit
    - $$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \quad \omega_0^2 y_1 &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \frac{7}{5}\omega_0^2 y_2 &= 0 \end{aligned}$$
- Modaltransformation:
  - Übergang zu Hauptkoordinaten
  - Bewegungsgleichungen vollständig entkoppelt
  - Lösungen freie Schwingungen mit Eigenfrequenzen
    - $$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ y_2 &= A_2 \cos(\sqrt{\frac{7}{5}}\omega_0 t + \varphi_2) \end{aligned}$$
  - Umkehrung durch Auflösen der Definition der y_i nach x_i
    - $$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}(y_1 - y_2) \\ x_2 &= -\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen

- Bewegung im Standardbeispiel bei einfacher Auslenkung:
  - Anfangsbedingungen seien

$$
\begin{aligned}
x_1(0) &= A, & x_2(0) &= 0 \\
\dot{x}_1(0) &= 0, & \dot{x}_2(0) &= 0
\end{aligned}
$$

  - daraus Anfangsbedingungen der Hauptkoordinaten

$$
\begin{aligned}
y_1(0) &= -(x_1(0) + x_2(0)) = -A \\
y_2(0) &= x_1(0) - x_2(0) = A \\
\dot{y}_1(0) &= 0 \\
\dot{y}_2(0) &= 0
\end{aligned}
$$

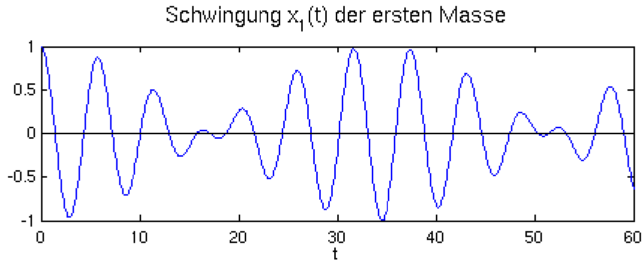
  - Lösung in Hauptkoordinaten daher

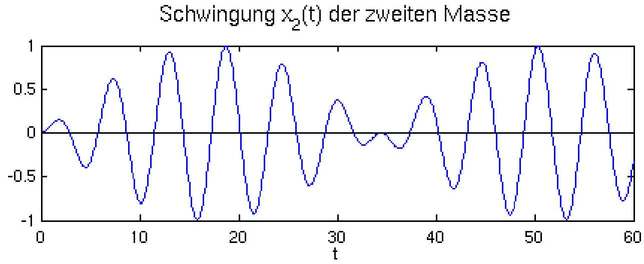
$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= -A\cos(\omega_0 t) \\
y_2(t) &= A\cos(\sqrt{\frac{7}{5}}\omega_0 t)
\end{aligned}
$$

  - Rücktransformation auf die Ausgangskoordinaten ergibt die Lösung

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= (-\frac{1}{2})(y_1(t) - y_2(t)) = \frac{A}{2}\left(\cos(\omega_0 t) + \cos(\sqrt{\frac{7}{5}}\omega_0 t)\right) \\
x_2(t) &= (-\frac{1}{2})(y_1(t) + y_2(t)) = \frac{A}{2}\left(\cos(\omega_0 t) - \cos(\sqrt{\frac{7}{5}}\omega_0 t)\right)
\end{aligned}
$$

  - graphisch





    - Überlagerung der Eigenschwingungen mit verschiedener Frequenz → Schwebung
        - 

- Aufgaben:
    - Aufgabe 3

Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden

- Systematisches Lösungsverfahren
- Anwendung im Standardbeispiel
- Praktische Berechnung

Systematisches Lösungsverfahren

- 1. Schritt: Aufstellen der Bewegungsgleichung in Matrixform
  - Bei n Freiheitsgraden n-dimensionalen Vektor der Koordinaten einführen
    - $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
  - Koeffizienten der Federkräfte zur Steifigkeitsmatrix C zusammenfassen
  - Koeffizienten der 2. Ableitungen ergeben Massenmatrix M
  - Bewegungsgleichung in Matrixform damit
    - $\mathbf{M\ddot{x}} + \mathbf{Cx} = \mathbf{0}$
  - Eigenschaften der Matrizen M und C
    - bei n Freiheitsgraden nxn-Matrizen
    - in der Regel symmetrisch
    - bei bestimmten Koordinaten M oder C diagonal
    - in Hauptkoordinaten beide gleichzeitig diagonal
- 2. Schritt: Bestimmung der Eigenfrequenzen ω_i
  - charakteristische Gleichung
    - $\text{Det}(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{C}) = \mathbf{0}$
  - Ausrechnen der Determinante → Polynom vom Grad n in ω^2
  - hat n (in der Praxis meistens verschiedene) Lösungen für ω^2
  - nur numerisch zu lösen (theoretisch ab n > 4, praktisch ab n > 2)
  - Lösungen ω_i aufsteigend sortieren
    - $\omega_1 < \omega_2 < ... < \omega_n$
- 3. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren $\hat{\mathbf{x}}_i$ zu den Eigenwerten ω_i
  - homogenes lineares Gleichungssystem
    - $(-\omega_i^2\mathbf{M} + \mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} = \mathbf{0}$
  - Lösung $\hat{\mathbf{x}}_i$ (Eigenvektor) i.a. festgelegt bis auf einen Faktor α
  - typische Wahlen für α
    - so, dass erste Komponente = 1
    - $\hat{x}_{i,1} = 1$
    - so, dass Länge des Eigenvektors = 1
    - $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} = 1$
  - zugehörige Schwingung (Eigenschwingung)
    - $\mathbf{x}_\mathbf{i}(t) = \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i}\cos(\omega_i t)$

- Verfahren wiederholen für alle Eigenfrequenzen
- Überlagerung der Eigenschwingungen ergibt allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung
  - $$\mathbf{x}(t) = \sum_i A_i \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$
- 2n freie Parameter
  - n Amplituden A_i
  - n Phasen ϕ_i
- aus 2n Anfangsbedingungen
  - n Anfangsauslenkungen x(0)
  - n Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}$ (0)

- 4. Schritt: Modaltransformation
  - Modalmatrix = Matrix der Eigenvektoren
    - $$\mathbf{\Phi} := (\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1}, \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2}, \ldots \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{n})$$
  - stellt Zusammenhang zu Hauptkoordinaten y her
    - $$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{\Phi^{-1} x}$$
  - macht die Matrizen M und C diagonal
    - $$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} &= \mathbf{m} \\ \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} &= \mathbf{c} \end{aligned}$$
  - mit Diagonalmatrizen
    - $$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$
  - leicht zu invertieren
    - $$\mathbf{m}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/m_n \end{pmatrix}$$
  - reproduziert Eigenfrequenzen
    - $$\omega_i^2 = \frac{c_i}{m_i}$$
  - Bewegungsgleichungen der Hauptkoordinaten y_i entkoppelt
    - $$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0$$
  - Inverse $\mathbf{\Phi}^{-1}$ leicht zu berechnen
    - $$\mathbf{\Phi^{-1}} = \mathbf{m^{-1} \Phi^T M}$$
  - Herleitung der Beziehungen im Anhang
- 5. Schritt: Anpassen an Anfangsbedingungen

- Anfangsbedingungen in Hauptkoordinaten transformieren
  - $$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{x}(0) \\ \dot{\mathbf{y}}(0) &= \mathbf{\Phi}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(0) \end{aligned}$$
- Lösung der entkoppelten Gleichungen wie im eindimensionalen Fall an die Anfangsbedingungen anpassen
  - $y_i = \hat{y}_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$
  - mit
  - $$\begin{aligned} \hat{y}_i &= \sqrt{y_i(0)^2 + \left(\frac{\dot{y}_i(0)}{\omega_i}\right)^2} \\ \tan\varphi_i &= \frac{-\dot{y}_i(0)}{y_i(0)\omega_i} \end{aligned}$$
- Rücktransformation zu den Ausgangskoordinaten
  - $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}\mathbf{y}$

Anwendung im Standardbeispiel

- 1. Schritt:
  - Bewegungsgleichungen waren
  - $$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + \frac{6}{5}cx_1 - \frac{1}{5}cx_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 - \frac{1}{5}cx_1 + \frac{6}{5}cx_2 &= 0 \end{aligned}$$
  - Steifigkeits- und Massenmatrix direkt ablesen (Nullen für fehlende Terme einfügen!)
  - $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}c & -\frac{1}{5}c \\ -\frac{1}{5}c & \frac{6}{5}c \end{pmatrix}$$
- 2. Schritt:
  - Charakteristische Gleichung aufstellen
  - $$\begin{aligned} &\mathrm{Det}(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{C}) \\ &= \mathrm{Det}\left(\begin{pmatrix} -\omega^2 m & 0 \\ 0 & -\omega^2 m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}c & -\frac{1}{5}c \\ -\frac{1}{5}c & \frac{6}{5}c \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -\omega^2 m + \frac{6}{5}c & -\frac{1}{5}c \\ -\frac{1}{5}c & -\omega^2 m + \frac{6}{5}c \end{pmatrix} \\ &= \left(-\omega^2 m + \frac{6}{5}c\right)^2 - \left(-\frac{1}{5}c\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega^4 - \frac{12}{5}\frac{c}{m}\omega^2 + \frac{35}{25}\left(\frac{c}{m}\right)^2 = 0 \end{aligned}$$
  - Eigenfrequenzen sind die positiven Lösungen
  - $$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{c}{m}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\frac{c}{m}} \end{aligned}$$
- 3. Schritt:
  - homogenes Gleichungssystem mit $\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}$
  - $$\begin{aligned} &(-\omega_1^2\mathbf{M} + \mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}_1 \\ &= \left[\begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}c & -\frac{1}{5}c \\ -\frac{1}{5}c & \frac{6}{5}c \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \hat{x}_{1,1} \\ \hat{x}_{1,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}c & -\frac{1}{5}c \\ -\frac{1}{5}c & \frac{1}{5}c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}_{1,1} \\ \hat{x}_{1,2} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$
  - In Komponenten ergibt das die zwei Gleichungen

- $$\begin{aligned} \frac{1}{5}c\hat{x}_{1,1} - \frac{1}{5}c\hat{x}_{1,2} &= 0 \\ -\frac{1}{5}c\hat{x}_{1,1} + \frac{1}{5}c\hat{x}_{1,2} &= 0 \end{aligned}$$
  - 2. Gleichung wird nicht benötigt (linear abhängig)
  - 1. Komponente wählen und Gleichung auflösen
    - $\hat{x}_{1,1} = 1 \Rightarrow \hat{x}_{1,2} = 1$
  - damit ist der 1. Eigenvektor
    - $$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  - analog für den 2. Eigenwert $\omega_2 = \sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\frac{c}{m}}$
    - $$\hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
- 4. Schritt:
  - Modalmatrix
    - $$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
  - modale Massenmatrix durch Matrixmultiplikation
    - $$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \end{aligned}$$
  - Inverse von m damit
    - $$\mathbf{m}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} \end{pmatrix}$$
  - Inverse von Φ durch Matrixmultiplikation
    - $$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}^{-1} &= \mathbf{m}^{-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
- 5. Schritt:
  - Anfangsbedingungen

- $$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

  - in Hauptkoordinaten transformieren
    - $$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A}{2} \\ \frac{A}{2} \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{y}}(0) &= \mathbf{\Phi}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0} \end{aligned}$$
  - Lösung in Hauptkoordinaten
    - $$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{A}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) \\ y_2(t) &= \frac{A}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) \end{aligned}$$
  - Rücktransformation
    - $$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{\Phi}\mathbf{y}(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) \\ \frac{A}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{A}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) + \frac{A}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) \\ \frac{A}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) - \frac{A}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
- Skalierungstrick zur Vereinfachung der Rechnung:
  - gemeinsamen Faktor aller Matrixelemente von M bzw. von C herausziehen (z.B. Einheiten)
    - $M = m\,M_0$, $C = c\,C_0$
  - Einführen der Abkürzungen
    - $$\begin{aligned} \omega_0^2 &:= \frac{c}{m} \\ \eta^2 &:= \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \end{aligned}$$
  - Damit vereinfacht sich die charakteristische Gleichung
    - $$\begin{aligned} &(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} \\ &\quad= (-m\omega^2\mathbf{M}_0 + c\mathbf{C}_0)\hat{\mathbf{x}} \\ &\quad= c(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\mathbf{M}_0 + \mathbf{C}_0)\hat{\mathbf{x}} \\ &\quad= c(-\eta^2\mathbf{M}_0 + \mathbf{C}_0)\hat{\mathbf{x}} = 0 \\ &\quad\Leftrightarrow (-\eta^2\mathbf{M}_0 + \mathbf{C}_0)\hat{\mathbf{x}} = 0 \end{aligned}$$
  - Praktisches Vorgehen damit
    - Faktoren aus Matrizen herausziehen
    - Abkürzungen definieren
    - charakteristische Gleichung in η^2 mit vereinfachten Matrizen lösen (Eigenwerte und

Eigenvektoren)
    - Eigenwerte mit ω_0 multiplizieren
  - Achtung: ω_0 und η sind hier reine Hilfsgrößen
- Anwendung beim Standardbeispiel
  - Definition der Größen
    - $$\mathbf{M} = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{5}c\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$
      $$\omega_0^2 = \frac{1}{5}\frac{c}{m}$$
  - Berechnung der charakteristischen Gleichung
    - $$\mathrm{Det}\left(-\eta^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\right) = 0$$
      $$\Leftrightarrow \quad (6-\eta^2)^2 - 1 = 0$$
      $$\Rightarrow \quad \eta_1 = \sqrt{5}, \quad \eta_2 = \sqrt{7}$$
  - Eigenwerte umskalieren
    - $$\omega_1 = \omega_0\,\eta_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$
      $$\omega_2 = \omega_0\,\eta_2 = \sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\frac{c}{m}}$$
- Aufgaben:
  - Aufgabe 4
  - Aufgabe 5
  - Aufgabe 6
  - Aufgabe 7

Praktische Berechnung

- Schwierigkeiten bei manueller Berechnung:
  - Nullstellen von Polynomen
    - ab Grad 5 unmöglich
    - ab Grad 3 aufwändig
  - Lösung homogener Gleichungssysteme
    - geht prinzipiell immer
    - ab n > 3 mühsam
  - Bestimmung der charakteristischen Gleichung als Determinante
    - prinzipiell möglich durch Entwickeln nach einer Zeile oder Spalte
    - handhabbar bei vielen Nullen in den Matrizen
    - grundsätzlich kein numerisches, sondern algebraisches Problem (Variable ω oder η)
- Nachvollziehen des Rechenwegs mit Matlab:
  - Schritte liefern alle Zwischenergebnisse der manuellen Rechnung
  - Aufstellen der charakteristischen Gleichung per Hand oder mit der Symbolic Toolbox
  - direkte Lösung (ohne Zwischenschritte) mit Matlabs eig-Funktion (s.u.)
- Aufstellen der charakteristischen Gleichung mit Matlabs Symbolic Toolbox:
  -
    ```
    >> M = [6, 0, 0; 0, 6, 0; 0, 0, 1] * 1000;
    >> C = [6 -3 0;-3 4 -1; 0 -1 1] * 1e6;
    >> syms om2;
    >> As = -om2*M + C
    >> eq = det(As)
    >> poly = sym2poly(eq)'
    ```
- Nullstellen von Polynomen:
  - in Matlab beliebige Ordnung möglich mit Funktion roots
  - liefert auch komplexe Lösungen
  - in obigem Beispiel
    -
      ```
      >> om2 = roots(poly)
      om2 =
         1.0e+03 *
          1.5000
          1.0000
          0.1667
      ```
  - aufsteigend nach Größe sortieren
    -

```
>> om2 = sort(om2)
om2 =
   1.0e+03 *
    0.1667
    1.0000
    1.5000
```

  - im Applet Polynom wie in Matlab als Koeffizientenvektor eingeben
- Lösung homogener Gleichungssysteme:
  - Voraussetzung: Systemmatrix **A** ist singulär (Determinante = 0)
  - Grundidee:
    - $x_1 = 1$ einsetzen
    - in "normales" (inhomogenes) Gleichungssystem umformen
    - mit Matlab lösen
  - Beispielhaft für dreidimensionales System
    - $$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$
  - x = 1 wählen und letzte Gleichung weglassen (überflüssig!)
    - $$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 y + c_1 z \\ a_2 + b_2 y + c_2 z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
  - Gleichungssystem für 1. Eigenvektor lösen mit
    - ```
      >> A = -om2(1)*M + C;
      >> xRest = A(1:end-1, 2:end) \ (-A(1:end-1,1))
      xRest =
          1.6667
          2.0000
      >> x = [1; xRest]
      x =
          1.0000
          1.6667
          2.0000
      ```
  - bei Problemen ggf. andere Koordinate auf 1 setzen oder andere Gleichung weglassen
  - Lösung homogener Gleichungssysteme in Matlab direkt mit null
    -
      ```

```
>> x = null(A)
x =
   -0.3586
   -0.5976
   -0.7171
```

- x ist auf Länge = 1 normiert
- Wahlweise umrechnen auf $x_1 = 1$ mit
  - ```
    >> x = x/x(1)
    x =
        1.0000
        1.6667
        2.0000
    ```
- null scheitert manchmal an numerischer Ungenauigkeit, gelegentlich hilft null(A, ’r’)

- Komplette Lösung des Eigenwert-Problems mit Matlab:
  - Eingabe von Massen- und Steifigkeitsmatrix
    - ```
      >> M = [6, 0, 0; 0, 6, 0; 0, 0, 1] * 1000;
      >> C = [6 -3 0;-3 4 -1; 0 -1 1] * 1e6;
      ```
  - komplette Lösung mit der Funktion eig
    - ```
      >> [Phi, om2] = eig(C,M);
      ```
  - Phi ist die fertige Modalmatrix mit irgendeiner Normierung der Eigenvektoren
    - ```
      Phi =
          0.0061   -0.0082   -0.0079
          0.0102   -0.0000    0.0079
          0.0122    0.0245   -0.0158
      ```
  - om2 ist eine Diagonalmatrix mit den Quadraten der Eigenfrequenzen als Werte
    - ```
      om2 =
         1.0e+03 *

          0.1667         0         0
               0    1.0000         0
               0         0    1.5000
      ```
  - Bei Bedarf umschreiben in Vektor der Eigenfrequenzen mit diag
    - ```
      >> om = diag(sqrt(om2))
      om =
         12.9099
         31.6228
         38.7298
      ```

    - Umrechnen der Eigenvektoren auf $x_1 = 1$ mit Trick
        - 1. Zeile von Phi als Diagonale einer Diagonalmatrix schreiben
        - Invertieren und von rechts an Phi heranmultiplizieren
    - in Matlab
        -

```
>> nn = diag(1./Phi(1,:));
>> Phi = Phi*nn
Phi =
    1.0000    1.0000    1.0000
    1.6667    0.0000   -1.0000
    2.0000   -3.0000    2.0000
```

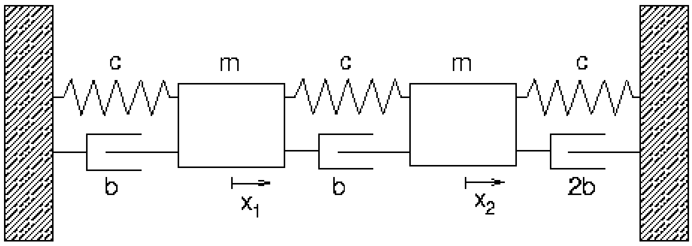
- Aufgaben:
    - Aufgabe 8

Gedämpfte Schwingungen

- Die zweidimensionale Schwingerkette
- Der allgemeine Fall
- Berechnung mit Matlab

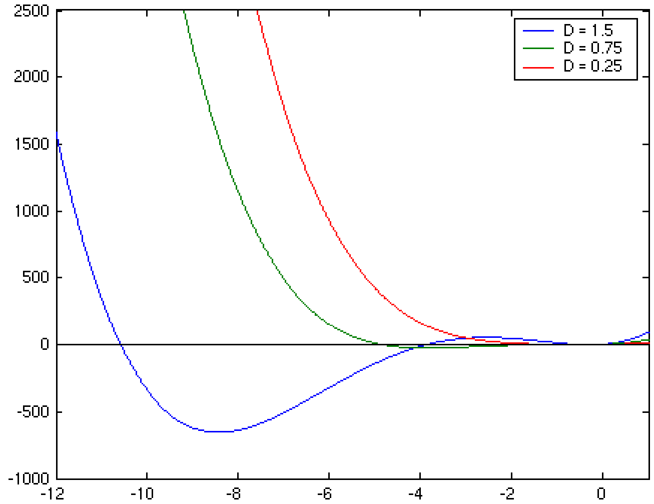
Die zweidimensionale Schwingerkette

- Zwei gekoppelte Schwinger mit viskoser Dämpfung:
    - Standardbeispiel mit Dämpfern

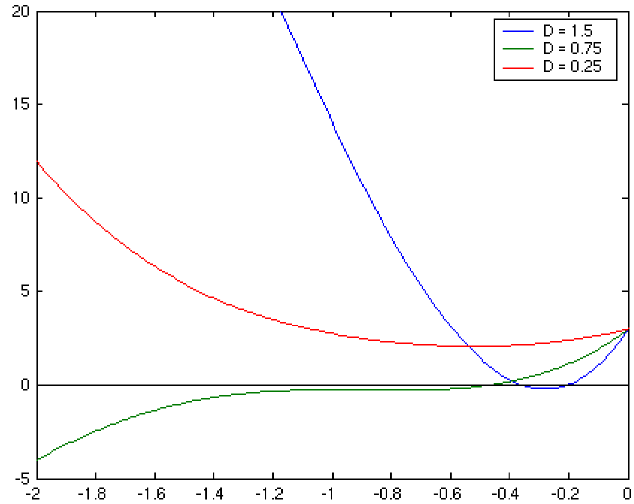


    - Bewegungsgleichungen
        - $$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2b\dot{x}_1 - b\dot{x}_2 + 2cx_1 - cx_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 - b\dot{x}_1 + 3b\dot{x}_2 - cx_1 + 2cx_2 &= 0 \end{aligned}$$
    - in Matrixform
        - $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$
    - mit
        - $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} m \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} b \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} c$$
    - Ansatz
        - $x_i = \hat{x}_i e^{\lambda t}$
    - ergibt
        - $$\begin{aligned} (m\lambda^2 + 2b\lambda + 2c)\hat{x}_1 + (-b\lambda - c)\hat{x}_2 &= 0 \\ (-b\lambda - c)\hat{x}_1 + (m\lambda^2 + 3b\lambda + 2c)\hat{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$
    - Vereinfachung durch Einführung dimensionsloser Größen
        - $$\omega_0 := \sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad \eta := \frac{\lambda}{\omega_0}, \qquad D := \frac{b}{2m\omega_0}$$
    - liefert
        - $$\begin{aligned} (\eta^2 + 4D\eta + 2)\hat{x}_1 + (-2D\eta - 1)\hat{x}_2 &= 0 \\ (-2D\eta - 1)\hat{x}_1 + (\eta^2 + 6D\eta + 2)\hat{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$
    - nichttriviale Lösungen für verschwindende Determinante →
        - $\eta^4 + 10D\eta^3 + (20D^2 + 4)\eta^2 + 16D\eta + 3 = 0$
- Lösungen des charakteristischen Polynoms:
    - allgemein
        - vier Lösungen (u.U. nicht alle verschieden)
        - reell oder paarweise konjugiert komplex

- Veranschaulichung



- Ausschnittsvergrößerung

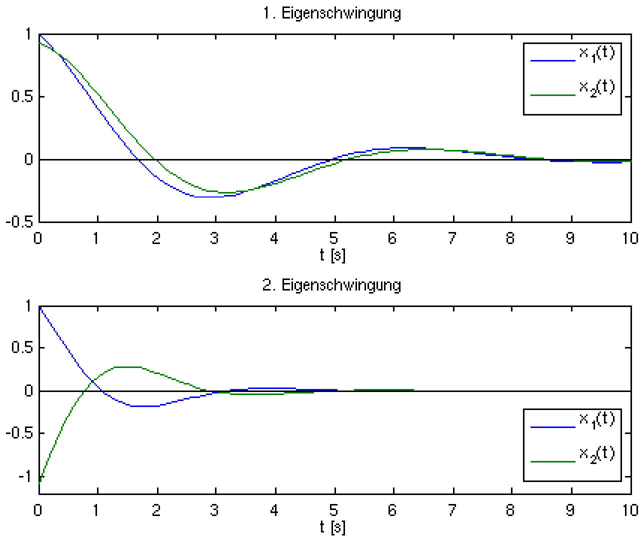


- große Dämpfung (D = 1.5)
  - vier negative Lösungen
  - Kriechfall für beide Eigenfunktionen
- mittlere Dämpfung (D = 0.75)
  - zwei negative Lösungen
  - $\rightarrow$ Kriechen in einer Eigenfunktion
  - ein Paar konjugiert komplex mit negativem Realteil
  - $\rightarrow$ eine gedämpfte Schwingung
- kleine Dämpfung (D = 0.25)
  - keine reellen Lösungen
  - zwei Paare konjugiert komplex mit negativem Realteil

- $\rightarrow$ beide Eigenfunktionen sind gedämpfte Schwingungen
  - betrachten i.f. nur noch kleine Dämpfung (D = 0.25) mit Lösung
    - $\eta_{1,2} = -0.3792 \pm j\ 0.9453$
    - $\eta_{3,4} = -0.8708 \pm j\ 1.4606$

    sortieren nach (positivem) Imaginärteil
- Bedeutung der komplexen Lösung:
  - betrachten $\eta_1 = -0.3792 + 0.9453\ j \rightarrow$
    - $\lambda = \eta_1\ \omega_0 = -0.3792\ \omega_0 + 0.9453\ j\ \omega_0$
  - Einsetzen in Ansatz $\rightarrow$
    - $$\begin{aligned} e^{\lambda t} &= e^{-0.3792\omega_0 t} e^{0.9453 j\omega_0 t} \\ &= e^{-0.3792\omega_0 t} (\cos(0.9453\omega_0 t) + j\sin(0.9453\omega_0 t)) \end{aligned}$$
  - gedämpfte Schwingung mit Frequenz $0.9453\ \omega_0$ und Dämpfung $\delta = 0.3792\ \omega_0$
  - konjugiert komplexe Lösung η_2 liefert gleiche Schwingung
- Eigenfunktionen bei schwacher Dämpfung D = 0.25:
  - Einsetzen von η_1 in das homogene Gleichungssystem liefert den 1. Eigenvektor
    - $$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9245 - 0.2575j \end{pmatrix}$$
  - Eigenschwingung damit insgesamt
    - $$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,1} \\ \hat{x}_{1,2} \end{pmatrix} e^{\lambda t} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9245 - 0.2575j \end{pmatrix} e^{-0.3792\omega_0 t} e^{0.9453 j\omega_0 t} \end{aligned}$$
  - Umschreiben von $\hat{x}_{1,2}$ in Polardarstellung
    - $0.9245 - 0.2575j = 0.9597e^{-0.2716j}$
  - Damit wird aus $x_{1,2}(t)$
    - $x_{1,2}(t) = 0.9597e^{-0.3792\omega_0 t} e^{j(0.9453\omega_0 t - 0.2716)}$
  - Der Realteil von $x_1(t)$ liefert dann folgende relle Lösung
    - $$\begin{aligned} x_{1,1}(t) &= e^{-0.3792\omega_0 t}\cos(0.9453\omega_0 t) \\ x_{1,2}(t) &= 0.9597e^{-0.3792\omega_0 t}\cos(0.9453\omega_0 t - 0.2716) \end{aligned}$$
  - Analog erhält man für den 2. Eigenvektor
    - $$\hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.0912 - 0.5069j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2032e^{-2.7067j} \end{pmatrix}$$
  - Daher lautet die 2. Eigenschwingung
    - $$\begin{aligned} x_{2,1}(t) &= e^{-0.8708\omega_0 t}\cos(1.4606\omega_0 t) \\ x_{2,2}(t) &= 1.2032e^{-0.8708\omega_0 t}\cos(1.4606\omega_0 t - 2.7067) \end{aligned}$$

- Interpretation:
  - Eigenschwingungen im Bild (mit $\omega_0 = 1/s$)



  - beide Massen beschreiben eine gedämpfte Schwingung jeweils mit gleicher Frequenz und gleichem Abklingfaktor
  - ihre Amplituden entsprechen etwa den ungedämpften Bewegungen, aber ihre Schwingungen sind gegeneinander phasenverschoben

Der allgemeine Fall

- Vorgehensweise:
  - Bewegungsgleichung in Matrixform aufstellen
    - $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$
  - (komplexe) Eigenfrequenzen aus charakteristischem Polynom
    - $\mathrm{Det}(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{B} + \mathbf{C}) = 0$
  - komplexe Eigenvektoren $\hat{z}$ zu λ als Lösung von
    - $(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{B} + \mathbf{C})\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$
    - wobei
    - $\hat{z}_{i,1} = 1$
  - komplexe Amplituden in Polarform schreiben
    - $\hat{z}_i = r_i e^{j\varphi_i}$
  - λ zerlegen in Real- und Imaginärteil
    - $\lambda = -\delta + j\omega$
  - reelle Lösung ist dann
    - $x_i(t) = r_i e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_i)$
- Modaltransformation:
  - i.a. vollständige Entkopplung der Gleichungen nicht möglich
  - Modaltransformation für B = 0
    - entkoppelt Massen- und Steifigkeitsterme
    - ergibt Eigenschwingungen ohne Dämpfung
  - Zuschaltung der Dämpfung B > 0 koppelt diese Eigenschwingungen miteinander
  - insbesondere bei Anregung einer solchen Eigenschwingung
    - → Dämpfer bewirken Hinzukommen auch der anderen Eigenschwingungen
- Aufgaben:
  - Aufgabe 9

Berechnung mit Matlab

- Beispiel:
  - Schwingerkette von oben
  - Werte
    - m = 1 kg
    - c = 1 N/m
    - b = 0.5 N s/m (also D = 0.25)
- Matrizen festlegen:
  - ```
    >> m = 1;
    >> c = 1;
    >> b = 0.5;
    >> M = [1, 0; 0, 1]*m;
    >> B = [2, -1; -1, 3]*b;
    >> C = [2, -1; -1, 2]*c;
    ```
- Komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen:
  - mit Matlabfunktion polyeig
    - ```
      >> [X, E] = polyeig(C, B, M)

      X =
         0.5713 - 0.2867i   0.5713 + 0.2867i   0.5156 + 0.5047i   0.5156 - 0.5047i
        -0.7687 + 0.0232i  -0.7687 - 0.0232i   0.6066 + 0.3339i   0.6066 - 0.3339i

      E =
        -0.8708 + 1.4606i
        -0.8708 - 1.4606i
        -0.3792 + 0.9453i
        -0.3792 - 0.9453i
      ```
  - Eigenwerte und -vektoren treten in konjugierten Paaren auf, man will jeweils nur einen davon
  - am einfachsten Eigenwerte mit positivem Imaginärteil (wird ω !) per Hand auswählen und aufsteigend nach Imaginärteil sortieren
    - ```
      >> la = E([3, 1])
      >> Phi = X(:, [3, 1])

      la =
        -0.3792 + 0.9453i
        -0.8708 + 1.4606i

      Phi =
         0.5156 + 0.5047i   0.5713 - 0.2867i
         0.6066 + 0.3339i  -0.7687 + 0.0232i
      ```
      ```

- erste Komponente der Eigenvektoren wie üblich auf 1 normieren
    -

```
>> nn = diag(1./Phi(1,:));
>> Phi = Phi*nn

Phi =
   1.0000             1.0000
   0.9245 - 0.2575i  -1.0912 - 0.5069i
```

- Eigenwerte und -vektoren zerlegen:
  -

```
>> delta = -real(la)
>> omega = imag(la)
>> r = abs(Phi)
>> phi = angle(Phi)

delta =
    0.3792
    0.8708

omega =
    0.9453
    1.4606

r =
    1.0000    1.0000
    0.9597    1.2032

phi =
         0         0
   -0.2716   -2.7067
```

  - damit lassen sich die Eigenschwingungen $x_i(t)$ hinschreiben
- Eigenschwingungen plotten:
  - hier alles möglichst explizit, eleganter mit geeigneten Array-Konstruktionen und/oder Schleifen
  -

```
>> t = 0:0.01:10;
>>
>> % 1. Eigenschwingung
>> j = 1;
>> rj = r(:,j);
>> phij = phi(:,j);
>> delj = delta(j);
>> omj = omega(j);
>> x11 = rj(1)*exp(-delj*t).*cos(omj*t + phij(1));
>> x12 = rj(2)*exp(-delj*t).*cos(omj*t + phij(2));
>>
>> % 2. Eigenschwingung
>> j = 2;
>> rj = r(:,j);
>> phij = phi(:,j);
>> delj = delta(j);
```

```
>> omj = omega(j);
>> x21 = rj(1)*exp(-delj*t).*cos(omj*t + phij(1));
>> x22 = rj(2)*exp(-delj*t).*cos(omj*t + phij(2));
>>
>> subplot(2,1,1);
>> plot(t, x11, t, x12, t, 0*t, 'k');
>> legend('x_1(t)', 'x_2(t)', 'Location', 'Best');
>> title('1. Eigenschwingung')
>>
>> subplot(2,1,2);
>> plot(t, x21, t, x22, t, 0*t, 'k');
>> legend('x_1(t)', 'x_2(t)', 'Location', 'Best');
>> title('2. Eigenschwingung')
```

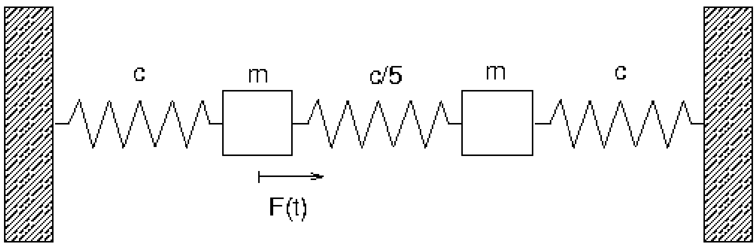
- erzeugtes Bild s.o.

Erzwungene Schwingungen gekoppelter Systeme

- Ungedämpfte Systeme
- Lösung durch Modaltransformation
- Berücksichtigung der Dämpfung

Ungedämpfte Systeme

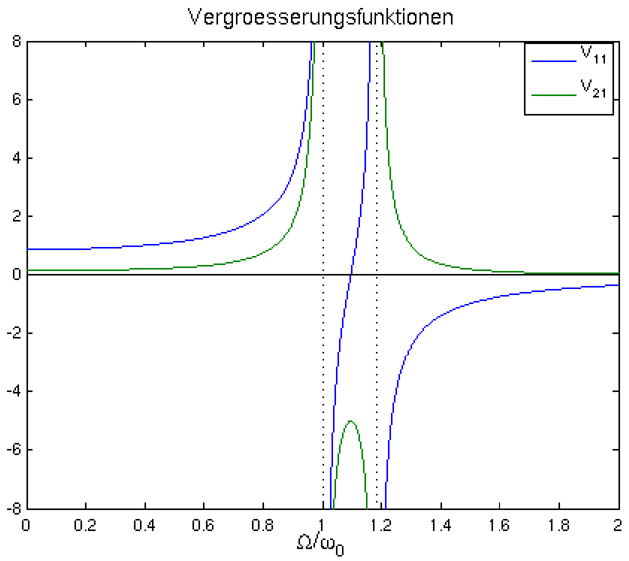
- Erregungskräfte bei gekoppelten Systemen:
  - Ursachen wie im 1d-Fall, z.B.
    - direkte Kraftübertragung
    - Fußpunkterregung
    - Unwuchten
    - Kombination mehrerer Fälle
  - Angriffspunkte z.B.
    - nur ein Schwinger (z.B. bei Fußpunkterregung)
    - mehrere Schwinger mit verschiedenen Ursachen
    - alle Schwinger in gleichmäßiger Weise
  - Zeitverhalten
    - gleichfrequente Erregung
    - harmonische Erregung
    - harmonische Erregung mit verschiedenen Frequenzen
    - unharmonische, aber periodische Erregung
    - unperiodische Erregung (z.B.Stoß)
    - Kombinationen
  - betrachten zunächst nur gleichmäßige harmonische Kraftübertragung
    - Kraft auf Masse m_i
    - $F_i(t) = \hat{F}_i \cos(\Omega t)$
    - als Vektor geschrieben
    - $$\mathbf{F}(t) = \hat{\mathbf{F}} \cos(\Omega t) = \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \vdots \\ \hat{F}_n \end{pmatrix} \cos(\Omega t)$$
    - zusätzlicher Faktor Ω^2 in $\hat{F}_i$ bei Unwucht- oder Fußpunkterregung
    - Spezialfall eines Angriffspunkt: alle $\hat{F}_i = 0$ bis auf einen
- Standardbeispiel mit Anregung:
  - Kraft nur auf 1. Masse



  - Bewegungsgleichungen

- $$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + \frac{6}{5}cx_1 - \frac{1}{5}cx_2 &= \hat{F}_1 \cos(\Omega t) \\ m\ddot{x}_2 - \frac{1}{5}cx_1 + \frac{6}{5}cx_2 &= 0 \end{aligned}$$
  - in Matrixform
    - $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{F}} \cos(\Omega t)$
  - mit
    - $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} m, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} c, \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
  - Lösung wieder Summe aus Lösung der homogenen Gleichung (Einschwingen) und partikulärer Lösung (Dauerschwingung)
- Berechnung der Dauerschwingung:
  - Ansatz
    - $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}} \cos(\Omega t)$
  - keine Dämpfung $\rightarrow$
    - Phasenverschiebung 0 oder π
    - wird durch Vorzeichen von $\hat{x}_i$ berücksichtigt
  - Einsetzen in Bewegungsgleichung $\rightarrow$
    - $(-\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{F}}$
  - bzw. in Komponenten (mit $\omega_0^2 = c/m$)
    - $$\begin{aligned} (\frac{6}{5}\omega_0^2 - \Omega^2)\hat{x}_1 - \frac{1}{5}\omega_0^2\hat{x}_2 &= \frac{\hat{F}_1}{m} \\ -\frac{1}{5}\omega_0^2\hat{x}_1 + (\frac{6}{5}\omega_0^2 - \Omega^2)\hat{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$
  - inhomogenes lineares Gleichungssystem, direkt auflösen $\rightarrow$
    - $$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \frac{\frac{6}{5}\omega_0^2 - \Omega^2}{(\frac{6}{5}\omega_0^2 - \Omega^2)^2 - (\frac{1}{5}\omega_0^2)^2} \frac{\hat{F}_1}{m} \\ \hat{x}_2 &= \frac{\frac{1}{5}\omega_0^2}{(\frac{6}{5}\omega_0^2 - \Omega^2)^2 - (\frac{1}{5}\omega_0^2)^2} \frac{\hat{F}_1}{m} \end{aligned}$$
- Analyse des Ergebnisses:
  - Amplitude der Kraft kann wie im eindimensionalen Fall abgespalten werden
    - $$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= V_{11}\hat{F}_1 \\ \hat{x}_2 &= V_{21}\hat{F}_1 \end{aligned}$$
    - mit Vergrößerungsfunktionen V_{11}, V_{21}
  - Polynom im Nenner = charakteristisches Polynom der homogenen Gleichung $\rightarrow$
    - Nullstellen sind gerade die Eigenfrequenzen $\omega_{1,2}$
    - unendliche Amplitude bei den Eigenfrequenzen

- graphische Darstellung der Vergrößerungsfunktionen (mit $\omega_0 = 1$)



- Nullstelle von V_{11} bei $\Omega \approx 1.1\ \omega_0 \rightarrow$
  - Masse 1 ist in Ruhe (obwohl sie erregt wird)
  - sämtliche Energie geht in Schwingung der zweiten Masse
  - wichtige Methode zur Vermeidung von Schwingungen der Masse 1 (Schwingungstilgung)

- Allgemeines Vorgehen:
  - Aufstellen der Bewegungsgleichungen in Matrixform
    - $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{F}}\cos(\Omega t)$
  - Ansatz
    - $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}\cos(\Omega t)$
  - liefert lineares Gleichungssystem
    - $(-\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{F}}$
  - Auflösen nach $\hat{\boldsymbol{x}} \rightarrow$ fertig
  - Kraftkomponenten lassen sich abspalten
    - $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{F}}$
  - etwa im 2d-Fall
    - $\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{pmatrix}$
    - mit der Frequenzgang-Matrix V
  - lässt sich formal (oder bei nicht zu großen Systemen auch numerisch) leicht lösen
    - $\mathbf{V} = (-\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{C})^{-1}$

- Aufgaben:
  - Aufgabe 10
  - Aufgabe 11

- Aufgabe 12

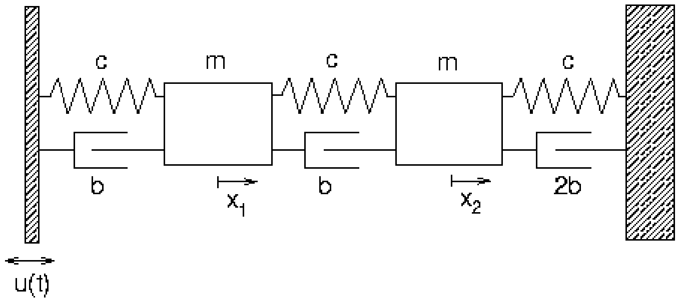
Lösung durch Modaltransformation

- Vorgehensweise:
  - Bestimmung der Eigenfrequenzen ω_i und Eigenschwingungen $\hat{x}_i$ des homogenen Systems
  - Aufstellen der Modalmatrix Φ
    - $\mathbf{\Phi} := (\mathbf{\hat{x}_1}, \mathbf{\hat{x}_2}, \ldots \mathbf{\hat{x}_n})$
  - Berechnen der Massenelemente m_i aus
    - $\mathbf{m} = \mathbf{\Phi}^\mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{\Phi}$
  - Bestimmung der modalen Anregungen
    - $\mathbf{F_m} = \mathbf{\Phi}^\mathbf{T} \mathbf{F}$
  - entkoppelte Gleichungen in Hauptkoordinaten lauten damit
    - $\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{1}{m_i} F_{m,i}(t)$
  - Lösungen für Hauptkoordinaten y_i wie im 1d-Fall ohne Dämpfung
    - $y_i(t) = \frac{1}{\omega_i^2 - \Omega^2} \frac{\hat{F}_{m,i}}{m_i} \cos(\Omega t)$
  - Lösung in Ausgangskoordinaten durch Rücktransformation
    - $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi} \mathbf{y}$
- Anwendung im Standardbeispiel:
  - Eigenfrequenzen und Modalmatrix
    - $\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \omega^\mathbf{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7/5 \end{pmatrix} \omega_0^2$
  - Massenelemente
    - $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}$
  - modale Anregungen
    - $\mathbf{F_m} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_1 \end{pmatrix} \cos \Omega t$
  - entkoppelte Gleichungen in Hauptkoordinaten
    - $$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \quad \omega_0^2 y_1 &= \frac{\hat{F}_1}{2m} \cos \Omega t \\ \ddot{y}_2 + \frac{7}{5} \omega_0^2 y_2 &= \frac{\hat{F}_1}{2m} \cos \Omega t \end{aligned}$$
  - Lösung für die y_i

- $$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{\hat{F}_1}{2m} \cos \Omega t \\ y_2(t) &= \frac{1}{\frac{7}{5}\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{\hat{F}_1}{2m} \cos \Omega t \end{aligned}$$
  - Rücktransformation auf Ausgangskoordinaten
    - $$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi y} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$
  - Einsetzen ergibt
    - $$\begin{aligned} x_1(t) &= \left[\frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} + \frac{1}{\frac{7}{5}\omega_0^2 - \Omega^2} \right] \frac{\hat{F}_1}{2m} \cos \Omega t \\ x_2(t) &= \left[\frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\frac{7}{5}\omega_0^2 - \Omega^2} \right] \frac{\hat{F}_1}{2m} \cos \Omega t \end{aligned}$$
    - in Übereinstimmung mit dem früheren Ergebnis
- Modale Erregerkraft $F_{m,i}$:
  - regt i-te Eigenschwingung an
  - Anteil der Kraft in Richtung des Eigenvektors $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ (Skalarprodukt)
  - $F_{m,i} = 0 \rightarrow$
    - Kraft steht senkrecht auf Eigenschwingung
    - Eigenschwingung wird nicht angeregt
- Aufgaben:
  - Aufgabe 13
  - Aufgabe 14

Berücksichtigung der Dämpfung

- Standardbeispiel mit Anregung und Dämpfung:
  - Massen-Feder-Dämpfer-System wie vorher



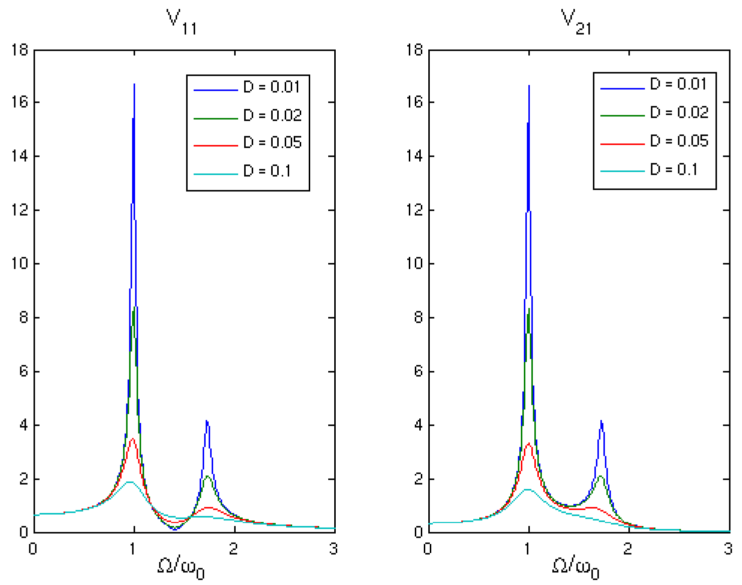
  - Fußpunkterregung
    - $u(t) = \hat{u}\cos(\Omega t)$
  - Anregungskraft wirkt nur auf erste Masse
    - $F_E(t) = \hat{u}\sqrt{c^2 + b^2\Omega^2}\cos(\Omega t + \psi) =: \hat{F}_1 \cos(\Omega t + \psi)$
  - mit
    - $\tan\psi = \frac{b}{c}\Omega$
  - verschiebe Zeitnullpunkt in Kraftmaximum → ψ = 0
  - Bewegungsgleichungen
    - $$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2b\dot{x}_1 - b\dot{x}_2 + 2cx_1 - cx_2 &= \hat{F}_1\cos(\Omega t) \\ m\ddot{x}_2 - b\dot{x}_1 + 3b\dot{x}_2 - cx_1 + 2cx_2 &= 0 \end{aligned}$$
  - schreiben Erregerkraft als Realteil einer komplexen Anregung
    - $F_E(t) = \mathrm{Re}(\hat{F}_1 e^{j\Omega t})$
  - und x = Re(z) für die komplexe Gleichung
    - $$\begin{aligned} m\ddot{z}_1 + 2b\dot{z}_1 - b\dot{z}_2 + 2cz_1 - cz_2 &= \hat{F}_1 e^{j\Omega t} \\ m\ddot{z}_2 - b\dot{z}_1 + 3b\dot{z}_2 - cz_1 + 2cz_2 &= 0 \end{aligned}$$
  - Ansatz
    - $\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{pmatrix} e^{j\Omega t}$
  - ergibt lineares Gleichungssystem für $\hat{z}_i$
    - $$\begin{aligned} (-m\Omega^2 + 2bj\Omega + 2c)\hat{z}_1 + (-bj\Omega - c)\hat{z}_2 &= \hat{F}_1 \\ (-bj\Omega - c)\hat{z}_1 + (-m\Omega^2 + 3bj\Omega + 2c)\hat{z}_2 &= 0 \end{aligned}$$
  - Auflösen liefert das Ergebnis für $\hat{z}_i$, damit dann auch für

- $\mathbf{x}(t) = \mathrm{Re}(\hat{\mathbf{z}} e^{j\Omega t})$

- Beispiel mit expliziten Werten:
  - Zur Vereinfachung rechnen wir mit folgenden Werten weiter
    - $$\begin{aligned} m &= 1\,\mathrm{kg} \\ c &= 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \\ b &= \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}} \\ \hat{F}_1 &= 1\,\mathrm{N} \\ \Omega &= 2\,\frac{1}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$
  - Der Exponentialansatz liefert dann das Gleichungssystem
    - $$\begin{aligned} (-2+2j)\hat{z}_1 + (-1-j)\hat{z}_2 &= 1\,\mathrm{m} \\ (-1-j)\hat{z}_1 + (-2+3j)\hat{z}_2 &= 0 \end{aligned}$$
  - Auflösen ergibt
    - $$\begin{aligned} \hat{z}_1 &= (-0.216 - 0.203j)\,\mathrm{m} \\ \hat{z}_2 &= (-0.095 + 0.068j)\,\mathrm{m} \end{aligned}$$
  - in Polardarstellung umgerechnet
    - $$\begin{aligned} \hat{z}_1 &= 0.296\,\mathrm{m}\ e^{-2.388j} \\ \hat{z}_2 &= 0.116\,\mathrm{m}\ e^{2.521j} \end{aligned}$$
  - Damit lautet die komplexe Lösung
    - $$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \hat{\mathbf{z}} e^{j\Omega t} \\ &= \begin{pmatrix} 0.296\,\mathrm{m}\ e^{j(2\frac{t}{s} - 2.388)} \\ 0.116\,\mathrm{m}\ e^{j(2\frac{t}{s} + 2.521)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
  - Die gesuchte relle Lösung ist dann der Realteil
    - $$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0.296\,\mathrm{m}\ \cos(2\frac{t}{s} - 2.388) \\ 0.116\,\mathrm{m}\ \cos(2\frac{t}{s} + 2.521) \end{pmatrix}$$
- Vorgehen im allgemeinen Fall:
  - Aufstellen der Bewegungsgleichung in Matrixform
    - $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{F}}\cos(\Omega t)$
  - Lösen des Gleichungssystems für komplexe Amplituden $\hat{z}$
    - $(-\Omega^2\mathbf{M} + j\Omega\mathbf{B} + \mathbf{C})\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{F}}$

- komplexes $\hat{z}$ in Polardarstellung bringen
  - $\hat{z}_i = r_i e^{j\varphi_i}$
- relle Lösung ist dann
  - $x_i(t) = r_i \cos(\Omega t + \varphi_i)$

- Standardbeispiel mit allgemeinen Werten:
  - Einführung der üblichen Abkürzungen und
    - $\hat{f}_1 := \dfrac{\hat{F}_1}{m\omega_0^2}$
  - ergibt
    - $$\begin{aligned}(-\eta^2 + 4jD\eta + 2)\hat{z}_1 + (-2jD\eta - 1)\hat{z}_2 &= \hat{f}_1 \\ (-2jD\eta - 1)\hat{z}_1 + (-\eta^2 + 6jD\eta + 2)\hat{z}_2 &= 0\end{aligned}$$
  - Auflösen $\rightarrow$
    - $$\begin{aligned}\hat{z}_1 &= \frac{-\eta^2 + 6jD\eta + 2}{(-\eta^2 + 6jD\eta + 2)(-\eta^2 + 4jD\eta + 2) - (2jD\eta + 1)^2}\hat{f}_1 =: H_{11}\hat{f}_1 \\ \hat{z}_2 &= \frac{2jD\eta + 1}{(-\eta^2 + 6jD\eta + 2)(-\eta^2 + 4jD\eta + 2) - (2jD\eta + 1)^2}\hat{f}_1 =: H_{21}\hat{f}_1\end{aligned}$$
    - mit komplexen Frequenzgang-Funktionen H_{11}, H_{21}
  - für gegebene Dämpfung D und Frequenzverhältnis $\eta = \Omega/\omega_0$ hat man
    - komplexe Zahlen H_{ik}
    - Polardarstellung
    - $H_{ik} = V_{ik} e^{j\varphi_{ik}}$
    - Vergrößerungsfunktionen V_{ik}
    - Phasenverschiebungen ϕ_{ik}
  - graphisch



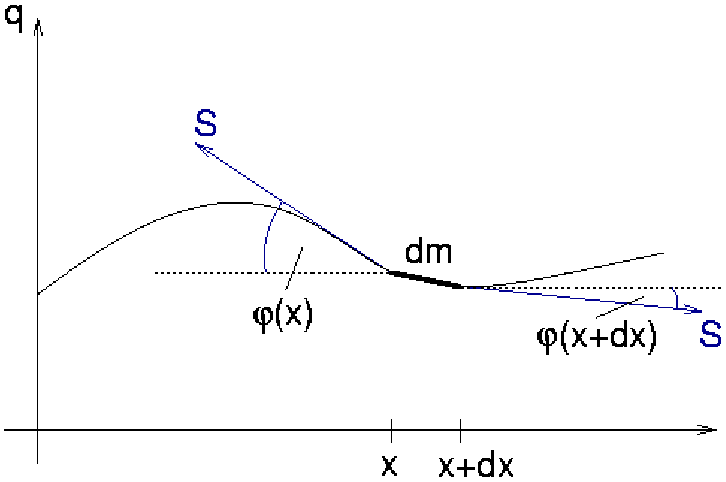
- ○ Interpretation
  - Resonanzen bei Eigenfrequenzen ω_0 und 1.73 ω_0
  - Resonanz bei ω_0 ist stärker, da sich bei kleinerer Frequenz die Dämpfung weniger auswirkt
  - V_{11} hat keine Nullstelle → nur partielle Schwingungstilgung
- Aufgaben:
  - ○ Aufgabe 15
  - ○ Aufgabe 16

Freie Schwingungen kontinuierlicher Schwinger

- Die Wellengleichung
- Lösungen der Wellengleichung
- Schwingungsgleichung des Balkens
- Schwingungsformen des Balkens

Die Wellengleichung

- Eindimensionale kontinuierliche Schwinger:
  - kontinuierliche Verteilung von
    - Trägheitselementen (Masse, Trägheitsmoment)
    - Rückstellkräften
    - ggf. Dämpfung
  - i.f. nur eindimensional (z.B. Stäbe, Balken)
  - Dämpfung wird vernachlässigt
- Saite:
  - biegsam, erst durch Vorspannung S schwingfähig
  - Anwendungen
    - Spannseile
    - Treibriemen
    - Überlandleitungen
  - betrachten kleine Auslenkungen q(x, t)
    - nur in einer Ebene
    - Spannkraft S näherungsweise konstant
  - Kräfte auf Massenelement dm



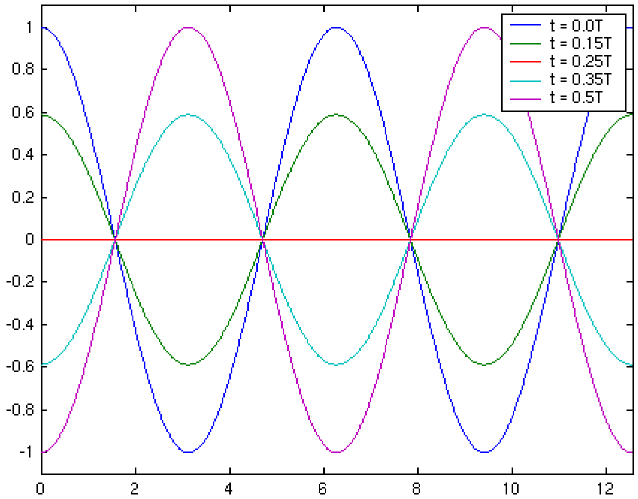
  - Kräftebilanz senkrecht zur Auslenkung (in q-Richtung)
    - $-S\,(\sin\varphi(x+dx,t) - \sin\varphi(x,t)) = dm\,\ddot{q}(x,t)$
  - Masse bei konstantem Querschnitt A und Dichte ρ
    - dm = ρ A dx
  - kleine Auslenkungen →
    - $$\begin{aligned} \sin\varphi &\approx \varphi \\ \Rightarrow \qquad -S\varphi'(x) &= \rho A \ddot{q} \end{aligned}$$

- ϕ ist negativer Winkel der Tangente, also
  - $\varphi \approx \tan\varphi = -q'$
- zusammengefasst folgt
  - $Sq'' = \rho A\ddot{q}$

- Grundform der Wellengleichung:
  - mit Parameter c (Ausbreitungsgeschwindigkeit)
    - $\ddot{q} - c^2 q'' = 0$
  - Bewegungsgleichung der Saite mit
    - $c = \sqrt{\frac{S}{\rho A}}$
  - partielle Differentialgleichung für q(x,t)
  - analog bei Längsschwingungen eines Stabs mit Kompressionsmodul E mit
    - $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
  - ebenso für Torsionsschwingungen einer Welle mit Torsionssteifigkeit $G\,I_T$ und polarem Flächenmoment 2. Grades I_p
    - $c = \sqrt{\frac{GI_T}{\rho I_p}}$
  - bei kreis- oder kreisringförmigem Querschnitt ist $I_T = I_p$

Lösungen der Wellengleichung

- Laufende Wellen:
  - harmonische nach rechts laufende Welle
    - $q(x,t) = \hat{q}\cos(kx - \omega t)$
  - Einsetzen in Wellengleichung →
    - $k = \frac{\omega}{c} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda f = c$
  - Wellen mit Ausbreitungsgeschwindigkeit c
  - allgemeine Lösung
    - $q(x,t) = q_R(x - ct) + q_L(x + ct)$
  - beliebig geformte nach rechts und links laufende Wellen
- Stehende Wellen:
  - stationäre Schwingungsform entlang des Stabs



  - Überlagerung von sich gegeneinander bewegenden Wellen
  - z.B. durch Reflexion an den Enden
  - technisch bedeutsam wegen entsprechender Randbedingungen
- Beschreibung stehender Wellen:
  - Trennung von Raum- und Zeitanteil mit Produktansatz (Bernoulli)
    - $q(x,t) = Q(x)T(t)$
  - Einsetzen in Wellengleichung →
    - $\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{Q''}{Q} =: -\omega^2$

- ω hängt weder von t noch von x ab
- Lösung der Gleichung für T
  - $T(t) = \cos(\omega t - \beta)$
- Amplitude steckt in Q
- Lösung der Gleichung für Q
  - $Q(x) = \hat{Q}_c \cos(kx) + \hat{Q}_s \sin(kx)$
- mit
  - $k = \frac{\omega}{c}$
- Parameter ω, β, $\hat{Q}_c$, $\hat{Q}_s$ aus Anfangs- und Randbedingungen

* Randbedingungen:
  - Forderungen für die Enden (des Stabs, der Saite etc.)
  - einfachste Form: explizite Bedingungen

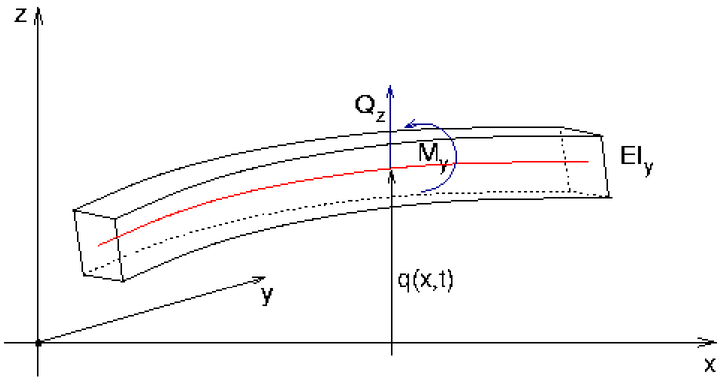
	Rand fest	keine Auslenkung	q = 0
	Rand frei	keine Kräfte	q' = 0

  - Kräfte
    - z.B. beim Zugstab
    - F = E A q'
    - allgemein F ~ q'
  - implizite Randbedingungen
    - Kräfte und Massen am Rand vorgegeben
    - z.B. bei elastischer Einspannung
    - ergibt Beziehung zwischen q und q' am Rand
* Eigenschwingungen:
  - Beispielfall: Stab eingespannt bei x = 0 und bei x = L
  - Randbedingungen
    - q(0,t) = 0, q(L,t) = 0
  - gelten für alle Zeiten →
    - Q(0) = 0, Q(L) = 0
  - in Lösung für Q(x) einsetzen →
    - $$\hat{Q}_c = 0$$ $$\sin(kL) = 0$$
  - daraus ergeben sich unendlich viele Eigenfrequenzen

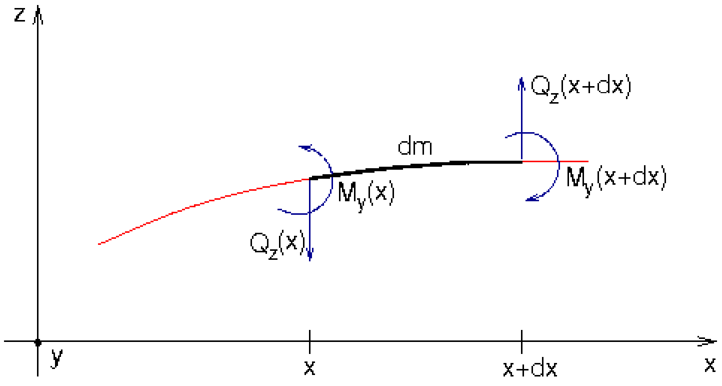
- $$\begin{aligned} k_i &= i\,\frac{\pi}{L} \\ \Rightarrow \qquad \omega_i &= ck_i = i\,\frac{c}{L}\pi \qquad i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$
  - in Q(X) einsetzen → Eigenschwingungen
    - $$Q_i(x) = \hat{Q}_s \sin(k_i x) = \hat{Q}_s \sin(\frac{i\pi}{L}x) \qquad i = 1, 2, \ldots$$
  - analog für andere Randbedingungen
- Aufgaben:
  - Aufgabe 17
  - Aufgabe 18

Schwingungsgleichung des Balkens

- Balken nach Bernoulli:
  - langer schmaler Körper mit konstantem Querschnitt
  - Verbiegung beschrieben durch Position q(x, t) des Flächenschwerpunkts (neutrale Faser)



    - schubstarr (keine Schubverformung)
    - nur in der x-z-Ebene
  - zwei Schwingungsformen
    - transversale Verschiebung mit q
    - Verbiegung mit q’
  - Zusammenhang zwischen Verbiegung und Biegemoment M_y
    - $M_y = -EI_y q''$
    - Elastizitätsmodul E
    - axiales Flächenträgheitsmoment I_y
- Herleitung der Schwingungsgleichung:
  - Kräfte bei Freischneiden von Massenelement dm



  - Kräftegleichgewicht für dm
    - $Q_z(x+dx,t) - Q_z(x,t) = dm\,\ddot{q} = \rho A dx\,\ddot{q}$
  - für kleines dx also

- $Q_z{}'(x,t) = \rho A \ddot{q}$

- Momentengleichgewicht für dm, bezogen auf den Mittelpunkt und den Winkel ϕ gegen die gerade Ausgangslage
  - $$M_y(x+dx,t) - M_y(x,t) - 2Q_z(x,t)\frac{dx}{2} = dJ\,\ddot{\varphi}$$
- dm ist sehr flache Scheibe, Fläche A, Dicke dx →
  - $$\begin{aligned} dJ &= \int_{dm} (x^2+z^2)dm' \\ &\approx \int_{dm} z^2 dm' \\ &= \int_{dm} z^2 \rho dx' dA' = \rho dx \int_A z^2 dA' \\ &= \rho I_y dx \end{aligned}$$
  - mit dem Flächenträgheitsmoment I_y
- damit wird aus der Momentengleichung für kleines dx
  - $M_y' - Q_z = \rho I_y \ddot{\varphi} = -\rho I_y \ddot{q}'$
- rechte Seite
  - Trägheit bei Verbiegungsschwingung q’
  - häufig klein gegen Trägheit bei Verschiebung q
  - Näherung i.f.: Term ist 0 (Bernoulli-Balken)
  - genauere Berücksichtigung möglich (Timoshenko-Balken)
- damit mit einmaligem Ableiten nach x
  - $M_y'' - Q_z' = 0$
- Zusammenhang zwischen M_y und q’’ liefert dann
  - $\ddot{q} + c^2 q'''' = 0$
- mit der Abkürzung
  - $$c^2 = \frac{EI_y}{\rho A}$$

Schwingungsformen des Balkens

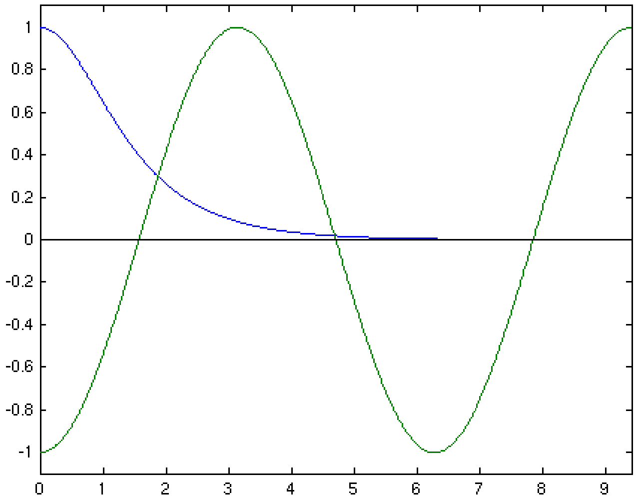
- Laufende Wellen:
  - Ansatz
    - $q(x,t) = \hat{q}\cos[k(x - vt)]$
  - Einsetzen in Bewegungsgleichung →
    - $v = ck = \frac{2\pi c}{\lambda}$
  - Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt von der Wellenlänge ab (Dispersion)
- Stehende Wellen:
  - wieder mit Produktansatz
    - $q(x,t) = Q(x)T(t)$
  - Einsetzen in Bewegungsgleichung →
    - $\frac{\ddot{T}}{T} = -c^2\frac{Q''''}{Q} =: -\omega^2$
  - Lösung für T wie gehabt
    - $T(t) = \cos(\omega t - \beta)$
  - Gleichung für Q
    - $Q''''(x) - \mu^4 Q(x) = 0$
  - mit
    - $\mu := \sqrt{\frac{\omega}{c}}$
  - allgemeine Lösung für Q
    - $Q(x) = \hat{Q}_c\cos(\mu x) + \hat{Q}_s\sin(\mu x) + \hat{Q}_{ch}\cosh(\mu x) + \hat{Q}_{sh}\sinh(\mu x)$
- Randbedingungen:
  - grundsätzlich vier Werte vorgebbar
  - bei einer Stelle etwa

Q(0)	Auslenkung bei 0
Q’(0)	Verbiegung bei 0
Q’’(0)	Moment bei 0
Q’’’(0)	Querkraft bei 0

  - in der Praxis meistens an jedem Ende zwei Bedingungen
  - wichtige explizite Randbedingungen

	Rand fest	keine Auslenkung, keine Verbiegung	Q = 0, Q’ = 0
	Rand frei	kein Moment, keine Kraft	Q’’ = 0, Q’’’ = 0
	Rand gestützt, mit Gelenk gelagert	keine Auslenkung, kein Moment	Q = 0, Q’’ = 0

- implizite Randbedingungen verknüpfen Randgrößen
- Eigenfrequenzen des einseitig eingespannten Balkens (Kragbalken):
  - feste Einspannung bei 0, freier Rand bei L →
    - Q(0) = Q’(0) = Q’’(L) = Q’’’(L) = 0
  - allgemeine Lösung für Q(x) und seine Ableitungen
    - $$\begin{aligned} Q(x) &= \hat{Q}_c \cos(\mu x) + \hat{Q}_s \sin(\mu x) + \hat{Q}_{ch} \cosh(\mu x) + \hat{Q}_{sh} \sinh(\mu x) \\ Q'(x) &= \mu \left(-\hat{Q}_c \sin(\mu x) + \hat{Q}_s \cos(\mu x) + \hat{Q}_{ch} \sinh(\mu x) + \hat{Q}_{sh} \cosh(\mu x)\right) \\ Q''(x) &= \mu^2 \left(-\hat{Q}_c \cos(\mu x) - \hat{Q}_s \sin(\mu x) + \hat{Q}_{ch} \cosh(\mu x) + \hat{Q}_{sh} \sinh(\mu x)\right) \\ Q'''(x) &= \mu^3 \left(\hat{Q}_c \sin(\mu x) - \hat{Q}_s \cos(\mu x) + \hat{Q}_{ch} \sinh(\mu x) + \hat{Q}_{sh} \cosh(\mu x)\right) \end{aligned}$$
  - Einsetzen der Randbedingungen liefert mit κ := μ L
    - $$\begin{aligned} \hat{Q}_c + \hat{Q}_{ch} &= 0 \\ \hat{Q}_s + \hat{Q}_{sh} &= 0 \\ -\hat{Q}_c \cos\kappa - \hat{Q}_s \sin\kappa + \hat{Q}_{ch} \cosh\kappa + \hat{Q}_{sh} \sinh\kappa &= 0 \\ \hat{Q}_c \sin\kappa - \hat{Q}_s \cos\kappa + \hat{Q}_{ch} \sinh\kappa + \hat{Q}_{sh} \cosh\kappa &= 0 \end{aligned}$$
  - homogenes Gleichungssystem
  - nichttriviale Lösungen ⇔ Systemdeterminante verschwindet
  - Determinante durch zeilenweises Entwickeln lösen
  - alternativ Gleichungen 1,2 auflösen und in 3,4 einsetzen, dann auflösen
  - nach endlich langer Rechnung folgt
    - $$\cos^2\kappa + \sin^2\kappa + 2\cos\kappa\cosh\kappa + \cosh^2\kappa - \sinh^2\kappa = 0$$
  - mit den bekannten Formeln
    - $$\begin{aligned} \cos^2\kappa + \sin^2\kappa &= 1 \\ \cosh^2\kappa - \sinh^2\kappa &= 1 \end{aligned}$$
  - erhält man eine transzendente Gleichung für die Eigenfrequenzen
    - $$1 + \cos\kappa\cosh\kappa = 0$$
- Lösung der Eigenwertgleichung:
  - graphisch als Schnitt zweier Funktionsgraphen, z.B.
    - $$\frac{1}{\cosh\kappa} = -\cos\kappa$$

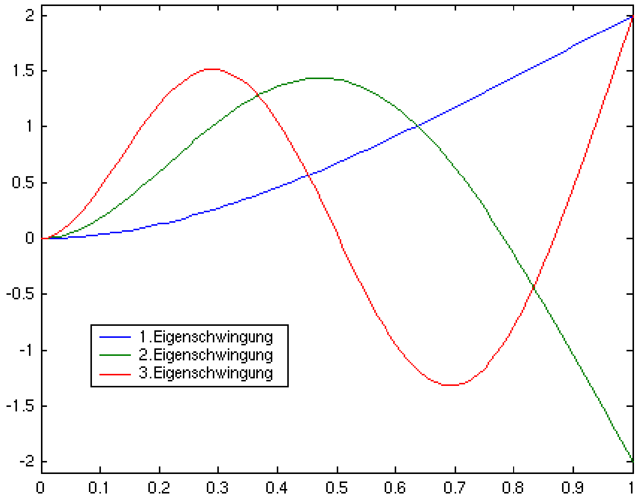


- Näherung für $n \geq 3$
  - $\kappa_i \approx (2i-1)\frac{\pi}{2}$
  - Fehler schon bei i = 3 nur 0.01 %
- numerisch bestimmte Werte
  - $\kappa_1 = 1.8751$
  - $\kappa_2 = 4.6941$
  - $\kappa_3 = 7.8548$
- Eigenfrequenzen daraus mit
  - $\omega_i = \frac{c}{L^2}\kappa_i^2$

- Eigenschwingungen des Kragbalkens:
  - Lösungen für die $\hat{Q}$ nur bis auf einen Faktor festgelegt
  - setzen willkürlich
    - $$\begin{aligned} \hat{Q}_{ch} &= 1 \\ \Rightarrow \quad \hat{Q}_c &= -1 \end{aligned}$$
  - außerdem war
    - $\hat{Q}_s = -\hat{Q}_{sh}$
  - alles in 4. Gleichung einsetzen und auflösen ergibt
    - $\hat{Q}_{sh} = -\frac{\sinh\kappa - \sin\kappa}{\cosh\kappa + \cos\kappa} =: -\epsilon$
  - ε_i aus den numerischen Werten von κ_i
    - $\varepsilon_1 = 0.7341$
    - $\varepsilon_2 = 1.0185$
    - $\varepsilon_3 = 0.9992$

- $\varepsilon_i = 1.0000$ für $i \geq 4$

- Eigenschwingungen damit
  - $$Q_i(x) = \cosh(\kappa_i \frac{x}{L}) - \cos(\kappa_i \frac{x}{L}) - \epsilon_i \sinh(\kappa_i \frac{x}{L}) + \epsilon_i \sin(\kappa_i \frac{x}{L})$$
- graphisch



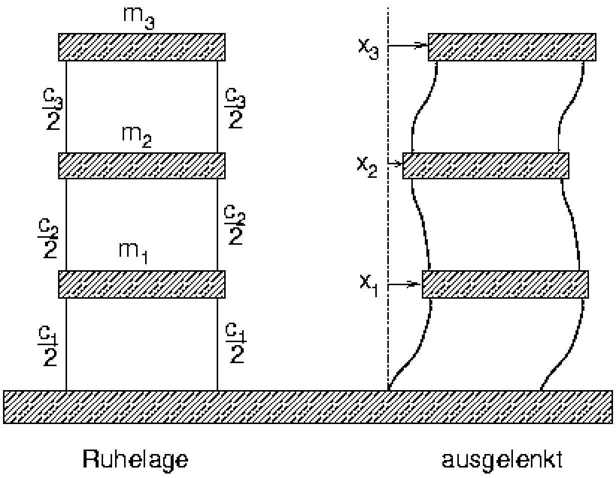
- Aufgaben:
  - Aufgabe 19
  - Aufgabe 20
  - Aufgabe 21

Aufgaben

- Aufgabe 1
- Aufgabe 2
- Aufgabe 3
- Aufgabe 4
- Aufgabe 5
- Aufgabe 6
- Aufgabe 7
- Aufgabe 8
- Aufgabe 9
- Aufgabe 10
- Aufgabe 11
- Aufgabe 12
- Aufgabe 13
- Aufgabe 14
- Aufgabe 15
- Aufgabe 16
- Aufgabe 17
- Aufgabe 18
- Aufgabe 19
- Aufgabe 20
- Aufgabe 21

Aufgabe 1

- Ein dreigeschossiges Haus wird modelliert durch Massen für die Stockwerke und jeweils zwei gleichartige Biegefedern für die vertikalen Stützen:

  Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.
- Lösung

Aufgabe 2

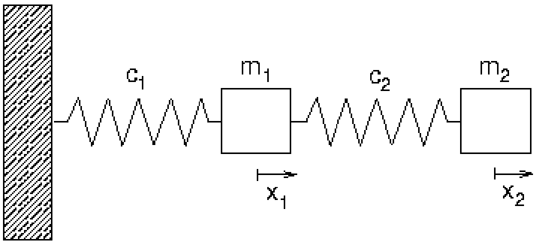
- Schreiben Sie die folgenden, massegekoppelten Bewegungsgleichungen in ein federgekoppeltes System um.
    - $$\begin{aligned} 6\ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 + 3\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\,x_1 &= 0 \\ -2\ddot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 + 5\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\,x_2 &= 0 \end{aligned}$$
- Lösung

Aufgabe 3

- Bestimmen Sie die Bewegung des Beispielsystems bei verschiedenen Anfangsbedingungen. Wählen Sie dabei der Einfachheit halber $\omega_0 = 1$.
  1. $x_1(0) = 0 \qquad x_2(0) = 0$
     $\dot{x}_1(0) = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \dot{x}_2(0) = -2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
  2. $x_1(0) = 4\,\mathrm{m} \qquad x_2(0) = 0$
     $\dot{x}_1(0) = 0 \qquad \dot{x}_2(0) = -2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
  3. $x_1(0) = 2\,\mathrm{m} \qquad x_2(0) = 2\,\mathrm{m}$
     $\dot{x}_1(0) = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \dot{x}_2(0) = -1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- Lösung

Aufgabe 4

- Gegeben sei folgendes Feder-Massen-System

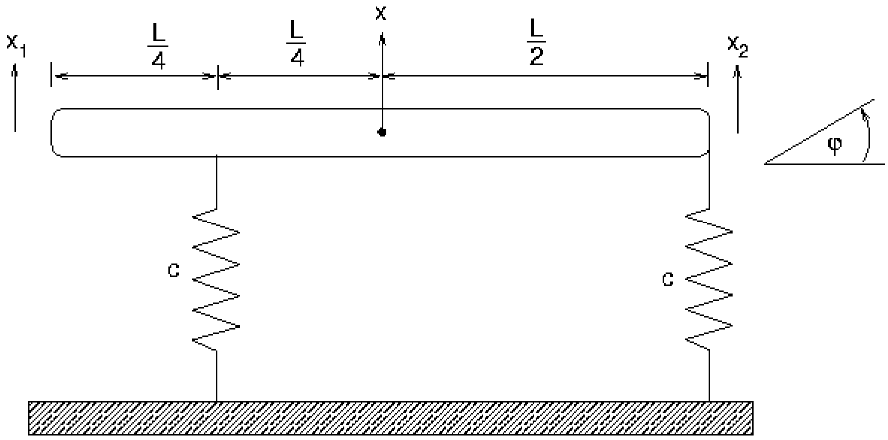


  1. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.
  2. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen.
  3. Wie sehen die Eigenschwingungen aus ?
  4. Welche Bewegung ergibt sich, wenn am Anfang nur Masse 1 um 0.12 m ausgelenkt wird?
  5. Wie müssen (bei verschwindenden Anfangsgeschwindigkeiten) die Massen ausgelenkt werden, um die zweite Eigenschwingung anzuregen ?
- Werte
  - c_1 = 10 N/m
  - c_2 = 2 N/m
  - m_1 = 8 kg
  - m_2 = 1 kg
- Lösung

↔↑↔

Aufgabe 5

- Betrachten Sie den folgenden auf zwei Federn sitzenden homogenen Balken der Masse m



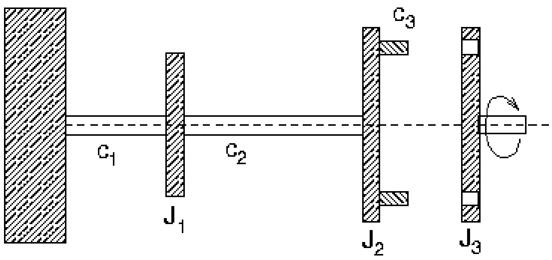
    1. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Auslenkung x und die Drehung ϕ bzgl. des Schwerpunkts auf. Gehen Sie dabei von einer horizontalen Gleichgewichtslage aus (aufgrund geeigneter Federvorspannungen).
    2. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.
    3. Ermitteln Sie die Eigenschwingungen und interpretieren Sie sie.
- Werte:
    - L = 2 m
    - c = 8 N/m
    - m = 4 kg
- Lösung

Aufgabe 6

- Gegeben sei das Gebäude aus Aufgabe 1 mit folgenden Werten:
  - $m_1 = m_2 = 6$ t, $m_3 = 1$ t
  - $c_1 = c_2 = 3$ c, $c_3 = c = 10^6$ N/m
  1. Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform.
  2. Ermitteln Sie die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen.
  3. In das oberste Geschoss des Gebäudes stürzt ein Flugzeug und verleiht ihm dadurch eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10$ m/s. Wie stark werden die einzelnen Eigenschwingungen angeregt und welche Schwingungsform stellt sich insgesamt ein ?
- Lösung

Aufgabe 7

- Ein Teilstück eines Antriebstrangs aus zwei Scheiben auf einer Welle befinde sich in Ruhe. Zur Zeit t = 0 wird über eine Bolzenkupplung mit Torsionssteifigkeit c_3 eine dritte Scheibe schlagartig angekuppelt, die sich mit der Drehzahl n dreht.



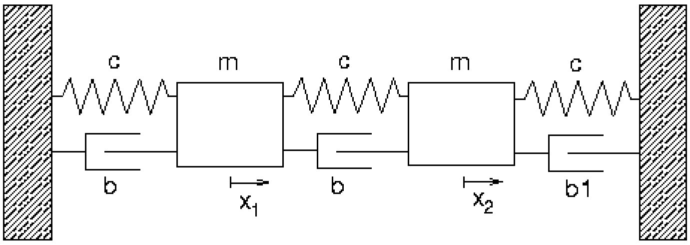
  1. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und -schwingungen des Gesamtsystems.
  2. Wie bewegt sich die erste Scheibe ab t = 0?
  3. Wie groß ist das Drehmoment $M_k(t)$ in der Kupplung?
- Werte:
  - $J_1 = J_2 = J_3 = 50$ kg m^2
  - $c_1 = 100$ Nm, $c_2 = 10000$ Nm, $c_3 = 1000$ Nm
  - n = 400 U/min
- Lösung

Aufgabe 8

- Wiederholen Sie Aufgabe 6 unter Verwendung von Matlab.
- Lösung

Aufgabe 9

- Berechnen Sie die Eigenfrequenzen und -schwingungen des folgenden Systems



1. ohne Dämpfung ($b = b_1 = 0$)
2. mit drei gleichen Dämpfern ($b = b1 \neq 0$)
3. nur mit zwei Dämpfern ($b \neq 0$, $b_1 = 0$)
4. Mit welchen Anfangsbedingungen kann man im Fall c. die 2. Eigenschwingung anregen?

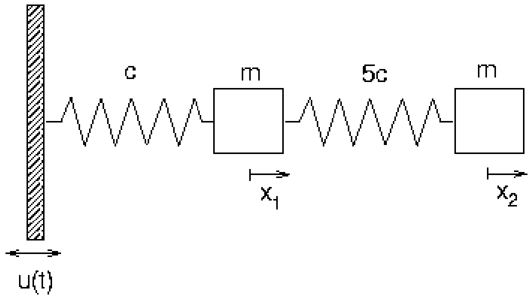
- Werte:
  - m = 2 kg
  - c = 8 N/m
  - b = 2 kg/s
- Lösung

Aufgabe 10

- Auf den Balken der Aufgabe 5 wirkt in vertikaler Richtung eine periodische Kraft
  - $F(t) = \hat{F} \cos(\Omega t)$,
- die direkt im Schwerpunkt angreift.
- Wie groß sind die Amplituden $\hat{x}$ und $\hat{\varphi}$ der sich einstellenden Schwingung?
- Werte
  - $\hat{F} = 0.5$ N
  - $\Omega = 2.0$ 1/s
- Lösung

Aufgabe 11

- Die zweidimensionale Schwingerkette



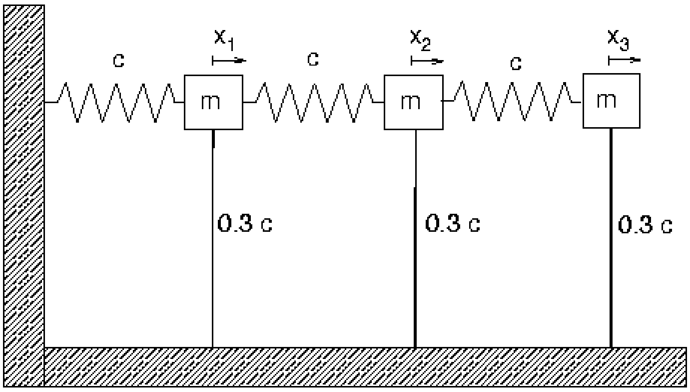
  wird durch harmonische Fußpunktschwingungen mit der Frequenz Ω angeregt.
  1. Bestimmen und skizzieren Sie die Vergrößerungsfunktionen.
  2. Bei welcher Frequenz wird die Schwingung der ersten bzw. der zweiten Masse getilgt?
- Lösung

Aufgabe 12

- Eine Maschine der Masse $m_1 = 1000$ kg, die auf einer Feder $c_1 = 9 \cdot 10^7$ N/m schwingend gelagert ist, wird durch Bodenvibrationen von 50 Hz angeregt. Zur Schwingungstilgung wird an der Maschine eine Masse $m_2 = 10$ kg mit einer Feder c_2 angebracht. Wie groß muss c_2 sein, um eine vollständige Tilgung zu erreichen? Wieviel % beträgt die Tilgung, wenn sich die Anregungsfrequenz auf 50.3 Hz ändert?
- Lösung

Aufgabe 13

- Drei gleiche Massen von m = 1 kg seien auf Biegefedern montiert und zusätzlich untereinander und mit der Wand mit Federn verbunden:

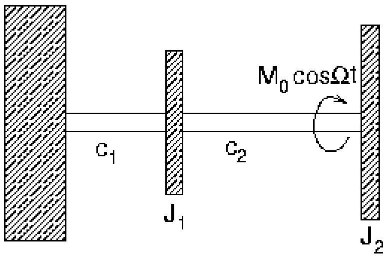
  

  Die Federkonstanten der Federn betragen c = 1 N/m, die Steifigkeiten der Biegefedern 0.3 N/m.

  1. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen des Systems.
  2. Die linke Masse werde durch eine harmonische Kraft F der Frequenz Ω angeregt. Bestimmen Sie die zugehörigen Vergrößerungsfunktionen, d.h. Elemente der Frequenzgangmatrix, und skizzieren Sie sie.
- Lösung

Aufgabe 14

- Auf einer Welle sitzen zwei Scheiben S_1, S_2 mit Trägheitsmomenten J_1 und J_2. Die Steifigkeiten der beiden Abschnitte seien c_1, c_2. Auf S_2 wirkt ein periodisches Drehmoment der Form
  - $M(t) = M_0 \cos(\Omega t)$
- Bestimmen Sie die Amplitude der dadurch ausgelösten Drehschwingungen von S_1 durch Modalanalyse.



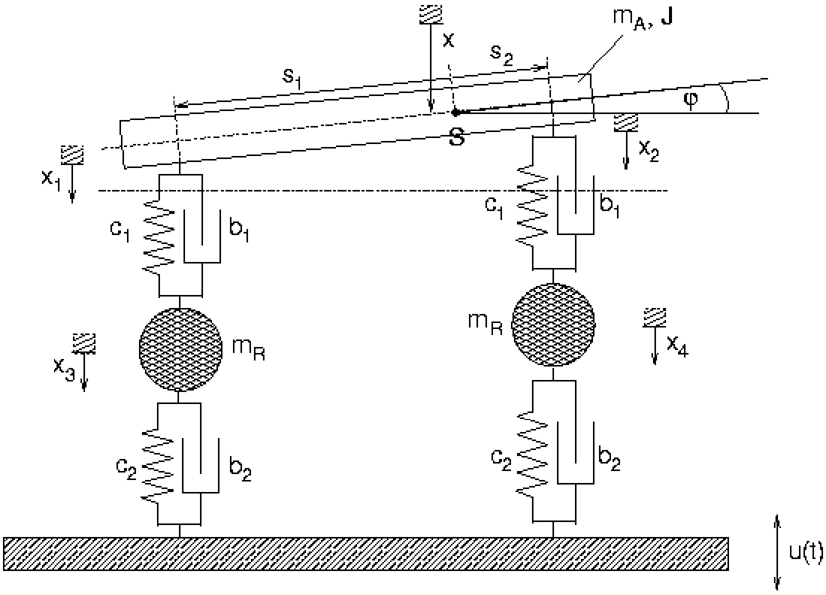
- Werte:
  - $J_1 = 1.5$ kg m^2
  - $J_2 = 2.6$ kg m^2
  - $c_1 = 1.2 \cdot 10^5$ Nm
  - $c_2 = 2.4 \cdot 10^5$ Nm
  - $M_0 = 50$ Nm
  - $\Omega = 170$ 1/s
- Lösung

Aufgabe 15

- Eine Maschine ruht zur Verringerung von Schwingungen auf einem Stoßdämpfer ($c_1 = 10^5$ N/m, b_1 = 400 Ns/m). Sie besteht aus zwei übereinanderliegenden Baugruppen, einem Sockel von 500 kg und einem Oberteil von 50 kg. Beide sind verbunden durch eine bedämpfte Feder ($c_2 = 3 \cdot 10^5$ N/m, b_2 = 100 Ns/m).
- Durch Bodenvibrationen von 13 Hz mit einer Amplitude von 0.2 mm wird sie zu Schwingungen angeregt.
  1. Wie groß ist die Amplitude der Schwingung des Oberteils?
  2. Wie sehr nähern sich Oberteil und Sockel maximal an (verglichen mit der Ruhelage)?
- Lösung

Aufgabe 16

- Ein Fahrzeug mit Radkästen und Stoßdämpfern werde durch das folgende System beschrieben:



Eine Fahrt über eine unebene Fahrbahn bewirke eine Krafterregung mit der gleichen Funktion
  - $F(t) = F_0 \cos \Omega t$
- an beiden Rädern.
  1. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform für die Koordinaten x, ϕ des Fahrgestells und x_3 und x_4 der Radkästen.
  2. Berechnen Sie die Eigenwerte und Modalmatrix für B = 0
  3. Transformieren Sie die Bewegungsgleichungen (incl. Dämpfung) mit dieser Modalmatrix. Was stellen Sie fest?
  4. Lösen Sie nun das gesamte System und berechnen Sie die Amplitude der Hub- und Nickschwingungen (in x und ϕ) des Fahrzeugs.
- Werte:
  - $s_1 = 3$ m, $s_2 = 1$ m
  - $m_A = 800$ kg, $m_R = 30$ kg, $J = 900$ kg m^2
  - $c_1 = 4 \cdot 10^5$ N/m, $c_2 = 10^5$ N/m
  - $b_1 = 3200$ Ns/m, $b_2 = 800$ Ns/m
  - $F_0 = 500$ N, $\Omega = 12$ 1/s
- Lösung

Aufgabe 17

- Berechnen Sie die niedrigsten drei Eigenfrequenzen der Torsionsschwingungen einer 0.8 m langen Stahlwelle mit einem kreisförmigen Querschnitt, die auf einer Seite eingespannt, auf der anderen lose ist.
- Lösung

Aufgabe 18

- Die Propellerwelle eines Schiffs bestehe aus Stahl ($E = 2.10 \cdot 10^{11}$ N/m^2, $\rho = 7800$ kg/m^3), habe eine Länge von 20 m und einen Durchmesser von 10 cm. Sie sei an einem Ende fest, am anderen Ende befinde sich ein Propeller der Masse m = 500 kg.
    1. Welche Randbedingungen gelten für die Welle? Betrachten Sie dafür die auf die Propellermasse wirkenden Kräfte.
    2. Welche Beziehung erfüllen die Eigenfrequenzen der Longitudinalschwingungen? Benutzen Sie den Produktansatz.
    3. Schreiben Sie die transzendente Gleichung aus b. mit dimensionslosen Größen. Lösen Sie sie graphisch oder numerisch und bestimmen Sie so näherungsweise die drei niedrigsten Eigenfrequenzen.
- Lösung

Aufgabe 19

- Ein zweiseitig abgestützter Stahlbalken ($E = 2.10 \cdot 10^{11}$ N/m^2, $\rho = 7800$ kg/m^3) habe eine Länge von 3 m und einen quadratischen Querschnitt mit einer Kantenlänge von 3 cm.
  1. Berechnen Sie die drei niedrigsten Eigenfrequenzen.
  2. Skizzieren Sie die zugehörigen Eigenschwingungen.
- Lösung

Aufgabe 20

- Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen eines Balkens, der auf einer Seite abgestützt, auf der anderen frei ist.
- Lösung

Aufgabe 21

- Am Ende eines Kragbalkens der Länge L befinde sich eine Masse m. Berechnen Sie die drei niedrigsten Eigenfrequenzen.
- Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Randbedingung bei L, indem Sie die Trägheit der Masse m berücksichtigen. Setzen Sie dann den Produktansatz direkt in die Randbedingung ein.
- Werte:
  - $E = 2.00 \cdot 10^{11}\ N/m^2$
  - $\rho = 7800\ kg/m^3$
  - $A = 2.6 \cdot 10^{-3}\ m^2$
  - $I = 4.7 \cdot 10^{-6}\ m^4$
  - $L = 1\ m$
  - $m = 10\ kg$
- Lösung

Anhang

- Herleitung der Modaltransformation
- Applets
- Matlab-Beispiele

Herleitung der Modaltransformation

- Grundlegende Beziehungen
  - Nach Definition der Eigenvektoren $\hat{x}_i$ gilt die Eigenwertgleichung
    - $$(-\omega_i^2 \mathbf{M} + \mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} = \mathbf{0}$$
  - Matrizen M und C sind symmetrisch
    - $$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^T$$
  - daher folgt für beliebige Vektoren a und b
    - $$\begin{aligned} \mathbf{a}^T\mathbf{M}\mathbf{b} &= (\mathbf{a}^T\mathbf{M}\mathbf{b})^T \\ &= \mathbf{b}^T\mathbf{M}^T\mathbf{a} \\ &= \mathbf{b}^T\mathbf{M}\mathbf{a} \end{aligned}$$
  - analog für C
- Orthogonalität der Eigenvektoren
  - Für zwei Eigenvektoren $\hat{x}_i$, $\hat{x}_j$ ($i \neq j$) zu verschiedenen Eigenfrequenzen gilt
    - $$\begin{aligned} \omega_i^2 \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} \\ \omega_j^2 \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{j} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{j} \end{aligned}$$
  - Multiplizieren der 1. Gleichung mit $\hat{x}_j^T$, der zweiten mit $\hat{x}_i^T$ und Subtraktion →
    - $$\omega_i^2 \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{j}^T\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} - \omega_j^2 \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i}^T\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{j} = \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{j}^T\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i}^T\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{j}$$
  - Symmetrie von M und C liefert
    - $$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{j}^T\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} = 0$$
  - wegen $\omega_i \neq \omega_j$ folgt also
    - $$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{j}^T\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} = 0$$
  - dies oben eingesetzt ergibt sofort
    - $$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{j}^T\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} = 0$$
  - im folgenden nehmen wir immer an, dass alle Eigenfrequenzen verschieden sind.
- Normierung der Eigenvektoren
  - modale Massen m_i sind definiert durch
    - $$m_i := \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i}^T\mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i}$$
  - modale Steifigkeiten c_i durch
    - $$c_i := \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i}^T\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i}$$
  - Multiplikation der Eigenwertgleichung mit $\hat{x}_i^T$ ergibt

- $$\begin{aligned} -\omega_i^2 \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} + \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{i} &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \omega_i^2 &= \frac{c_i}{m_i} \end{aligned}$$
  - oder in Matrixform mit den Diagonalmatrizen m = diag(m_i) etc.
    - $\omega^\mathbf{2} = \mathbf{m}^{-1}\mathbf{c}$
- Eigenschaften der Modalmatrix
  - definiert als Matrix der Eigenvektoren
    - $\mathbf{\Phi} := (\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1}, \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2}, \ldots \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{n})$
  - Betrachte Elemente der Matrix Φ^T M Φ
    - $$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1^T \\ \hat{\mathbf{x}}_2^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_n^T \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 & \hat{\mathbf{x}}_2 & \ldots & \hat{\mathbf{x}}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1^T \\ \hat{\mathbf{x}}_2^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_1 & \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_2 & \ldots & \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1} & \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2} & \ldots & \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{n} \\ \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1} & \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2} & \ldots & \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{n}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1} & \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{n}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2} & \ldots & \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{n}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & m_n \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{m} \end{aligned}$$
  - analog erhält man
    - $\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} = \mathbf{c}$
  - Die Inverse Φ^{-1} der Modalmatrix berechnet man als
    - $\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{m}^{-1} \mathbf{\Phi}^\mathbf{T} \mathbf{M}$
  - es ist nämlich
    - $$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Phi} &= \mathbf{m}^{-1} \mathbf{\Phi}^\mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \\ &= \mathbf{m}^{-1}\mathbf{m} \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$
- Übergang zu Hauptkoordinaten
  - Definition der Hauptkoordinaten y durch

- $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi y}$

- Ableitung der Matrixmultiplikation ergibt
  - $\dot{x} = \Phi \dot{y}, \quad \ddot{x} = \Phi \ddot{y}$
- Einsetzen in Bewegungsgleichung und Multiplikation mit $\Phi^T \rightarrow$
  - $\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- mit den obigen Beziehungen daher
  - $\mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{c} \mathbf{y} = \mathbf{0}$
- m und c sind Diagonalmatrizen, d.h. die Gleichungen lauten in Koordinaten
  - $\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0$

Applets

- Überlagerung von Schwingungen verschiedener Frequenz
- Gekoppelte Schwingungen
- Nullstellen von Polynomen

Matlab-Beispiele

- ex8.m

ex8.m

```
% Lösung von Aufgabe 8

% Massen- und Steifigkeitsmatrix
M = diag([6 6 1])*10^3;               % in kg
C = [6 -3 0;-3 4 -1; 0 -1 1]*10^6;    % in N/m

% charakteristische Gleichung mit Symbolic Toolbox
syms om2;
A = -om2*M + C;
eq = det(A);
charEq = sym2poly(eq)’;
charEq = charEq/charEq(1)    % zum Vergleichen auf 1 normiert

% Nullstellen
om2 = roots(charEq)

% Daraus die Eigenfrequenzen, aufsteigend sortiert
om = sort(sqrt(om2))

% 1. Eigenvektor bestimmen
om1 = om(1);
A = -om1^2*M + C
% Lösung der homogenen Gleichung (Länge = 1)
x1 = null(A)
% der Vergleichbarkeit wegen: 1. Element = 1
x1 = x1/x1(1)

% analog 2. Eigenvektor:
format long
A = -om(2)^2*M + C
format short
x2 = null(A)
% klappt nicht wegen numerischer Ungenauigkeit!
% hier hilft eine Option von null
x2 = null(A, ’r’)
x2 = x2/x2(1)

% 3. Eigenvektor ginge hier mit null, alternativ direkt durch Lösen des
% Gleichungssystems
A = -om(3)^2*M + C;
xRest = A(1:end-1, 2:end) \ (-A(1:end-1,1))
x3 = [1; xRest]

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Anfangsbedingungen anpassen
x0 = [0, 0, 0]’;
v0 = [0, 0, 10]’;

% Modalmatrix
Phi = [x1, x2, x3]
% Hilfsmatrix m
```

```
m = Phi'*M*Phi
% Inverse von Phi
% PhiInv = inv(m)*Phi'*M   % ok, es geht aber auch ganz ohne inv
PhiInv = diag(1./diag(m))*Phi'*M

% Anfangsbedingungen in Hauptkoordinaten
yv0 = PhiInv*v0
yhat = abs(yv0./om)
phi = sign(yv0)*pi/2

% Vorfaktoren der x-Terme
VF = Phi*diag(yhat.*sign(phi))
```

Lösung von Aufgabe 1

- Kräfte F_i auf die Masse m_i sind

  - $$\begin{aligned} F_1 &= -c_1 x_1 - c_2(x_1 - x_2) \\ F_2 &= c_2(x_1 - x_2) + c_3(x_3 - x_2) \\ F_3 &= c_3(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

- Bewegungsgleichungen daher (sortiert nach x_i)

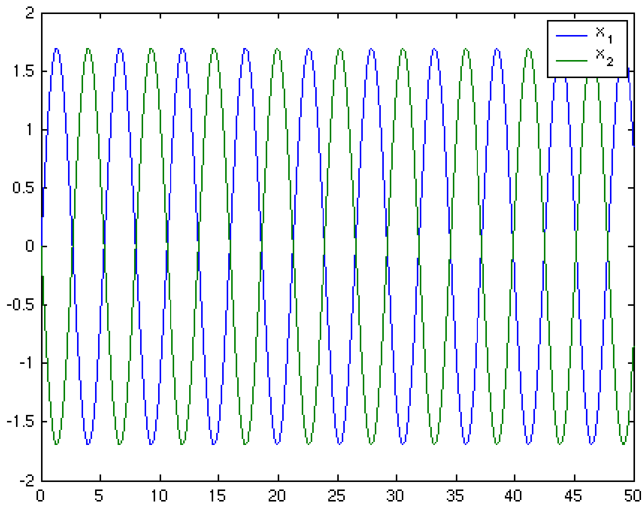
  - $$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2 x_1 + (c_2 + c_3)x_2 - c_3 x_3 &= 0 \\ m_3\ddot{x}_3 - c_3 x_2 + c_3 x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 2

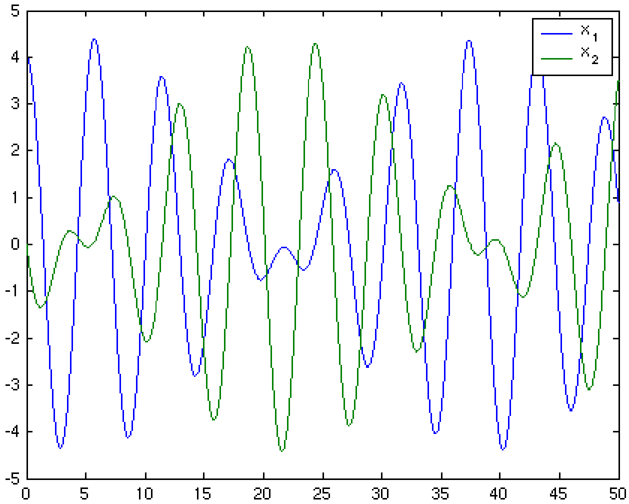
- Um die Massenkopplungen zu beseitigen, werden $\ddot{x}_1$ bzw. $\ddot{x}_2$ eliminiert, etwa
  - 2 · 1. Gleichung + 2. Gleichung $\rightarrow$
    - $10\ddot{x}_1 + 6\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\,x_1 + 5\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\,x_2 = 0$
  - 1. Gleichung + 3 · 2. Gleichung $\rightarrow$
    - $10\ddot{x}_2 + 3\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\,x_1 + 15\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\,x_2 = 0$

Lösung von Aufgabe 3

- Anfangsbedingungen a:
  - Umrechnen der Anfangsbedingungen auf Hauptkoordinaten ergibt
    - $y_1(0) = 0 \quad y_2(0) = 0$
      $\dot{y}_1(0) = 0 \quad \dot{y}_2(0) = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
  - Die 1. Eigenschwingung y_1 wird gar nicht angeregt:
    - $y_1(t) = 0$
  - Die 2. Eigenschwingung hat nur eine Anfangsgeschwindigkeit, keine Anfangsauslenkung. Sie schwingt also mit einer reinen Sinusfunktion (d.h. Phasenverschiebung = $-\pi/2$). Die Amplitude ist einfach
    - $\hat{y}_2 = \dfrac{\dot{y}_2(0)}{\omega_2}$
  - also ist die 2. Eigenschwingung
    - $y_2(t) = 3.381\,\mathrm{m}\ \sin\left(\sqrt{\frac{7}{5}}t/\mathrm{s}\right)$
  - Zurückrechnen auf die Originalkoordinaten ergibt
    - $$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{2}(y_1 - y_2) = 1.690\,\mathrm{m}\ \sin\left(\sqrt{\frac{7}{5}}t/\mathrm{s}\right) \\ x_2(t) &= -\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = -1.690\,\mathrm{m}\ \sin\left(\sqrt{\frac{7}{5}}t/\mathrm{s}\right) \end{aligned}$$
  - im Bild



-
  - Die Bewegung ist eine gegenläufige harmonische Schwingung beider Massen gemäß der 2. Eigenschwingung.
- Anfangsbedingungen b:
  - In Hauptkoordinaten lauten die Anfangsbedingungen
    - $$y_1(0) = -4\,\mathrm{m} \qquad y_2(0) = 4\,\mathrm{m}$$
      $$\dot{y}_1(0) = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \dot{y}_2(0) = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
  - Amplitude und Phasenverschiebung werden mit den bekannten Beziehungen berechnet
    - $$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= \sqrt{y_1(0)^2 + \left(\frac{\dot{y}_1(0)}{\omega_1}\right)^2} = 4.472\,\mathrm{m} \\ \varphi_1 &= \arctan\left(\frac{-\dot{y}_1(0)}{y_1(0)\omega_1}\right) = -2.678 \end{aligned}$$
  - Die 1. Eigenschwingung hat also die Form
    - $$y_1(t) = 4.472\,\mathrm{m}\,\cos\left(t/\mathrm{s} - 2.678\right)$$
  - analog für die 2. Eigenschwingung
    - $$y_2(t) = 4.343\,\mathrm{m}\,\cos\left(\sqrt{\frac{7}{5}}t/\mathrm{s} - 0.400\right)$$
  - Zurücktransformieren liefert die Bewegung der beiden Massen
    - $$\begin{aligned} x_1(t) &= -2.236\,\mathrm{m}\,\cos\left(t/\mathrm{s} - 2.678\right) + 2.171\,\mathrm{m}\,\cos\left(\sqrt{\frac{7}{5}}t/\mathrm{s} - 0.400\right) \\ x_2(t) &= -2.236\,\mathrm{m}\,\cos\left(t/\mathrm{s} - 2.678\right) - 2.171\,\mathrm{m}\,\cos\left(\sqrt{\frac{7}{5}}t/\mathrm{s} - 0.400\right) \end{aligned}$$
  - im Bild



-
  - Beide Eigenschwingungen werden etwa gleich stark angeregt, es ergeben sich daher normale Schwebungskurven.
- Anfangsbedingungen c:
  - Anfangsbedingungen in Hauptkoordinaten

$$y_1(0) = -4\,\mathrm{m} \quad y_2(0) = 0$$
$$\dot{y}_1(0) = 0 \quad \dot{y}_2(0) = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

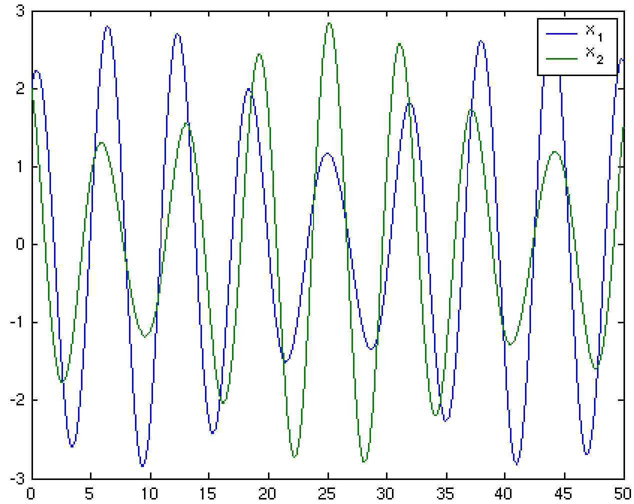
  - Eigenschwingungen mit Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -4\,\mathrm{m}\,\cos(t/\mathrm{s}) \\ y_2(t) &= 1.690\,\mathrm{m}\,\sin\left(\sqrt{\frac{7}{5}}t/\mathrm{s}\right) \end{aligned}$$

  - Zurückrechnen auf Originalkoordinaten

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2\,\mathrm{m}\,\cos(t/\mathrm{s}) + 0.845\,\mathrm{m}\,\sin\left(\sqrt{\frac{7}{5}}t/\mathrm{s}\right) \\ x_2(t) &= 2\,\mathrm{m}\,\cos(t/\mathrm{s}) - 0.845\,\mathrm{m}\,\sin\left(\sqrt{\frac{7}{5}}t/\mathrm{s}\right) \end{aligned}$$

  - im Bild



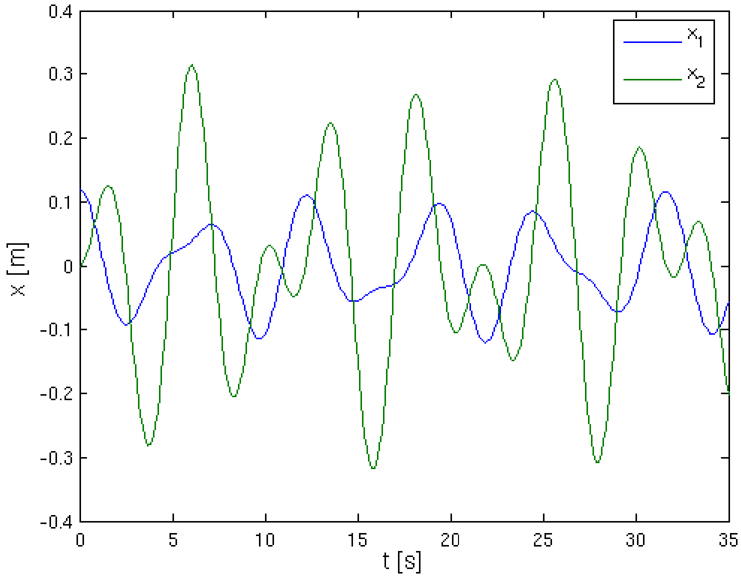
-
  - Die Anfangsauslenkungen regen nur die 1. Eigenschwingung an, die Anfangsgeschwindigkeiten nur die 2.Insgesamt ergibt sich wieder eine Schwebung als Überlagerung, die allerdings nicht bis auf 0 heruntergeht, da die Amplituden der Eigenschwingungen unterschiedlich groß sind.

Lösung von Aufgabe 4

1. Bewegungsgleichungen:
   - Die Kräfte sind
     - $$\begin{aligned} F_1 &= -c_1 x_1 + c_2(x_2 - x_1) \\ F_2 &= -c_2(x_2 - x_1) \end{aligned}$$
   - Daher lauten die Bewegungsgleichungen
     - $$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 x_1 + c_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$
   - Daraus liest man sofort die Matrizen ab
     - $$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{kg} \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \end{aligned}$$
2. Bestimmung der Eigenfrequenzen:
   - Die charakteristische Gleichung liefert (unter Weglassen der Einheiten)
     - $$\begin{aligned} &\mathrm{Det}\left(-\omega^2 \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 12 - 8\omega^2 & -2 \\ -2 & 2 - \omega^2 \end{pmatrix} \\ &= (12 - 8\omega^2)(2 - \omega^2) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega^4 - \frac{7}{2}\omega^2 + \frac{5}{2} = 0 \\ &\Rightarrow \omega_1 = 1\,\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{1}{\mathrm{s}} \approx 1.581\,\frac{1}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$
3. Eigenschwingungen:
   - Zur Bestimmung des 1. Eigenvektors setzen wir ω_1 in die skalierte Gleichung ein
     - $$\begin{aligned} &\left(-1 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,1} \\ \hat{x}_{1,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,1} \\ \hat{x}_{1,2} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$
   - Die Wahl $\hat{x}_{1,1} = 1$ liefert $\hat{x}_{1,2} = 2$, also ist der 1. Eigenvektor
     - $$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
   - Die Form der 1. Eigenschwingung ist somit

- $$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(t/\mathrm{s})$$
- analog erhält man auch den Eigenvektor zu ω_2
  - $$\left(-\frac{5}{2}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \hat{x}_{2,1} \\ \hat{x}_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}_{2,1} \\ \hat{x}_{2,2} \end{pmatrix} = 0$$
- Die Wahl $\hat{x}_{2,1} = 1$ liefert $\hat{x}_{2,2} = -4$, somit ist der 2. Eigenvektor
  - $$\hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$
- und die 2. Eigenschwingung
  - $$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{\frac{5}{2}}t/\mathrm{s})$$

4. Bewegung bei gegebenen Anfangsbedingungen
   - Die Modalmatrix ist
     - $$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$
   - damit erhält man die modale Massenmatrix
     - $$\mathbf{m} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \mathrm{kg}$$
   - und ihre Inverse
     - $$\mathbf{m}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{kg}}$$
   - Als nächstes bestimmt man die inverse Modalmatrix
     - $$\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{m}^{-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$
   - Die Anfangsbedingungen waren gegeben als
     - $$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.12\,\mathrm{m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = 0$$
   - in Hauptkoordinaten bedeutet das
     - $$\mathbf{y}_0 = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{cm}, \qquad \dot{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{\Phi}^{-1}\dot{\mathbf{x}}_0 = 0$$
   - Die Lösung in Hauptkoordinaten ergibt sich aus diesen Anfangsbedingungen sofort zu
     - $$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 8\,\mathrm{cm}\,\cos(t/\mathrm{s}) \\ 4\,\mathrm{cm}\,\cos(1.581t/\mathrm{s}) \end{pmatrix}$$

- Rücktransformation liefert schließlich die Lösung in Ausgangskoordinaten
  - $$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{\Phi y}(t) \\ \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8\,\text{cm}\ \cos(t/\text{s}) + 4\,\text{cm}\ \cos(1.581t/\text{s}) \\ 16\,\text{cm}\ \cos(t/\text{s}) - 16\,\text{cm}\ \cos(1.581t/\text{s}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
- Plot
  - 

5. Anregen der 2. Eigenschwingung:
   - Die Anfangsbedingungen müssen selbst die Form der 2. Eigenschwingung haben, damit nur diese angeregt wird, d.h. mit beliebiger Amplitude A
     - $$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} A \\ -4A \end{pmatrix}$$
   - Dann ergibt sich nämlich als Anfangsbedingung in Hauptkoordinaten
     - $$\mathbf{y}(0) = \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{x}(0) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   - also wird wirklich nur die 2. Eigenschwingung angeregt.
   - Natürlich kann man das Ergebnis auch direkt durch Rückwärtsrechnen herleiten: In Hauptkoordinaten sollen die Anfangsbedingungen die Form haben
     - $$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ A \end{pmatrix}$$
   - Dann lauten sie in Ausgangskoordinaten
     - $$\mathbf{x}(0) = \mathbf{\Phi y}(0) = \begin{pmatrix} A \\ -4A \end{pmatrix}$$
   - entsprechen also dem 2. Eigenvektor, wie eingangs behauptet.

Lösung von Aufgabe 5

1. Bewegungsgleichungen:
   - System entspricht dem Beispielmodell des starren Körpers mit
     - $c_1 = c_2 = 8$ N/m, $s_1 = 0.5$ m, $s_2 = 1$ m, m = 4 kg
     - Trägheitsmoment $J = mL^2/12 = 4/3$ kg m^2
   - Bewegungsgleichungen daher durch direkten Vergleich
     - $$\begin{aligned} 4\,\mathrm{kg}\,\ddot{x} + 16\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,x + 4\,\mathrm{N}\,\varphi &= 0 \\ \frac{4}{3}\,\mathrm{kg\,m^2}\,\ddot{\varphi} + 4\,\mathrm{N}\,x + 10\,\mathrm{Nm}\,\varphi &= 0 \end{aligned}$$
   - Matrizen ablesen
     - $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{kg} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\,\mathrm{kg\,m^2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 16\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} & 4\,\mathrm{N} \\ 4\,\mathrm{N} & 10\,\mathrm{Nm} \end{pmatrix}$$
2. Eigenfrequenzen:
   - charakteristische Gleichung (der Übersichtlichkeit halber ohne Einheiten):
     - $$\begin{aligned} &\mathrm{Det}\left(-\omega^2 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}\right) \\ &\quad = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 16 - 4\omega^2 & 4 \\ 4 & 10 - \frac{4}{3}\omega^2 \end{pmatrix} \\ &\quad = (16 - 4\omega^2)(10 - \frac{4}{3}\omega^2) - 16 \\ &\quad = \frac{16}{3}\omega^4 - \frac{184}{3}\omega^2 + 144 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \omega^4 - \frac{23}{2}\omega^2 + 27 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \omega_1 = 1.813\,\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad \omega_2 = 2.866\,\frac{1}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$
3. Eigenschwingungen:
   - Eigenvektor für ω_1
     - $$\begin{pmatrix} 16 - 4\omega_1^2 & 4 \\ 4 & (10 - \frac{4}{3}\omega_1^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,1} \\ \hat{x}_{1,2} \end{pmatrix} = 0$$
   - Die erste Gleichung ergibt mit $\hat{x}_{1,1} = 1$
     - $$\begin{aligned} &16 - 4\omega_1^2 + 4\hat{x}_{1,2} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \hat{x}_{1,2} = -\frac{16 - 4\omega_1^2}{4} = -0.7122\,\frac{1}{\mathrm{m}} \end{aligned}$$
   - Der 1. Eigenvektor lautet also (wieder mit Einheiten)

- $\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.7122\,\frac{1}{\mathrm{m}} \end{pmatrix}$

- und die 1. Eigenschwingung hat die Form
  - $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.7122\,\frac{1}{\mathrm{m}} \end{pmatrix} \cos(1.813\, t/\mathrm{s})$
- Analog erhält man den 2. Eigenvektor
  - $\hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4.212\,\frac{1}{\mathrm{m}} \end{pmatrix}$
- und die 2. Eigenschwingung
  - $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4.212\,\frac{1}{\mathrm{m}} \end{pmatrix} \cos(2.866\, t/\mathrm{s})$

4. Interpretation der Schwingungsformen:
   - Form der 1. Eigenschwingung
     - Betrachte Amplitude A = 0.2 m der Hubbewegung
     - → Amplitude des Nickwinkels $\hat{\varphi}$ = 0.1424 ≙ 8.2°
     - leichte Nickbewegung
     - gegenläufig zur Hubschwingung, d.h.am oberen Punkt der Hubschwingung ist der Balken nach rechts unten geneigt
   - Form der 2. Eigenschwingung
     - Betrachte Amplitude A = 0.2 m der Hubbewegung
     - → Amplitude des Nickwinkels $\hat{\varphi}$ = 0.8424 ≙ 48.3°
     - heftige, schnelle Nickbewegung
     - gleichsinnig zur Hubschwingung, d.h.am oberen Punkt der Hubschwingung ist der Balken nach links unten geneigt

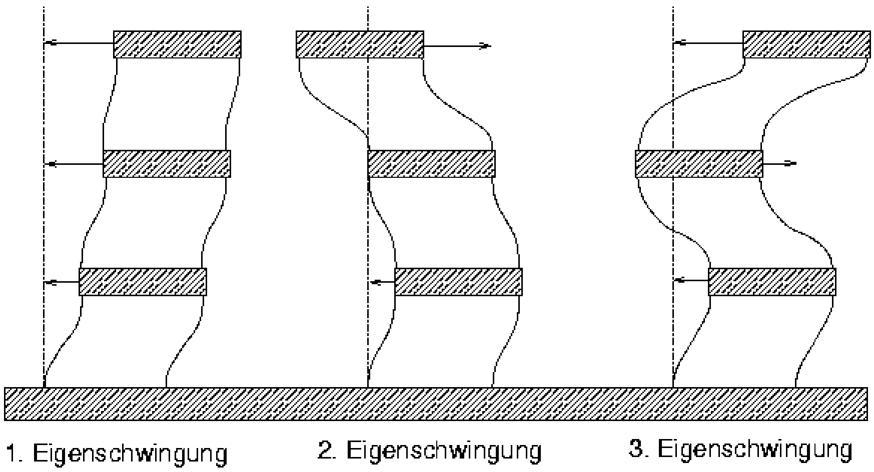
Lösung von Aufgabe 6

1. Bewegungsgleichungen:
   - Allgemeine Matrixform
     - $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$
   - Nach Aufgabe 1 sind die Matrizen
     - $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}$$
   - mit den angegebenen Werten also
     - $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 10^3\,\mathrm{kg}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$
2. Eigenfrequenzen und -schwingungen:
   - charakteristische Gleichung
     - $\mathrm{Det}(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{C}) = \mathbf{0}$
   - mit den Abkürzungen
     - $\omega_0{}^2 = 10^3\ 1/\mathrm{s}^2$, $\eta = \omega/\omega_0$
   - wird dies
     - $$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 6 - 6\eta^2 & -3 & 0 \\ -3 & 4 - 6\eta^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \eta^2 \end{pmatrix} = 0$$
   - Entwickeln nach der letzten Zeile liefert
     - $3(1 - \eta^2)(12\eta^4 - 20\eta^2 + 3) = 0$
   - mit den Lösungen
     - $$\eta_1^2 = \frac{1}{6}, \quad \eta_2^2 = 1, \quad \eta_3^2 = \frac{3}{2}$$
   - Eigenfrequenzen sind also
     - $$\omega_1 = 12.91\,\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad \omega_2 = 31.62\,\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad \omega_3 = 38.73\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$
   - Gleichungssystem für 1. Eigenschwingung ($\eta^2 = 1/6$)
     - $$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = 0$$
   - Ich wähle $\hat{x}_1 = 1$ (in der Hoffnung, dass das funktioniert). Dann ergibt sich folgendes

Gleichungssystem für $\hat{x}_2$ und $\hat{x}_3$

- $$\begin{aligned} -3\hat{x}_2 &= -5 \\ 3\hat{x}_2 - \hat{x}_3 &= 3 \\ -\hat{x}_2 + \frac{5}{6}\hat{x}_3 &= 0 \end{aligned}$$

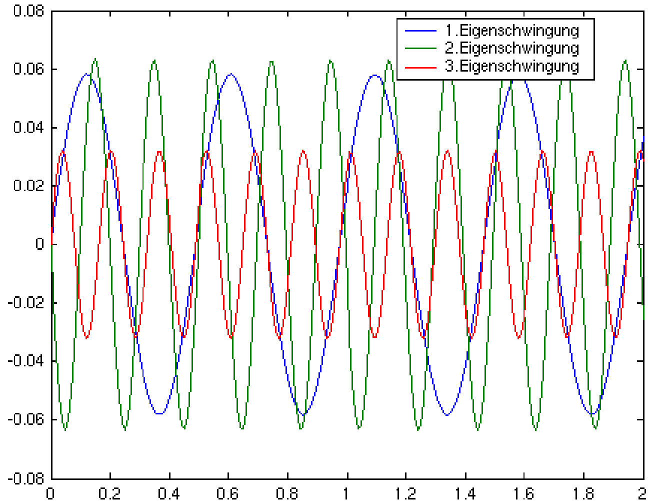
- Lösungen sind
  - $$\hat{x}_2 = \frac{5}{3}, \quad \hat{x}_3 = 2$$
- Insgesamt ist der 1. Eigenvektor
  - $$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$
- analog erhält man für die 2. und 3. Eigenschwingung
  - $$\hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
- Veranschaulichung



- Bemerkungen
  - Knoten bei x_2 bei 2. Ordnung. Die Wahl $x_2 = 1$ hätte hier nicht geklappt.
  - Zahl der Knoten steigt mit jeder Ordnung (bei steigenden Eigenfrequenzen) um 1. Dies gilt allgemein.

3. Bewegung bei gegebenen Anfangsbedingungen:
   - Anfangsbedingungen
     - $$\mathbf{x_0} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

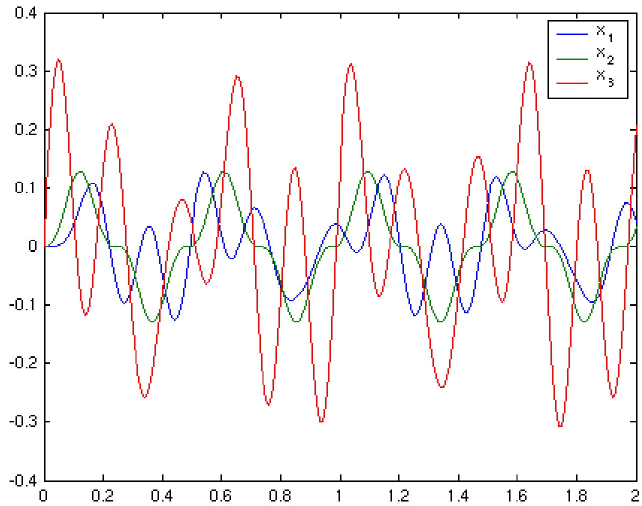
- Die Modalmatrix lautet
    - $$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.667 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$
- Damit ist
    - $$\mathbf{m} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 2.667 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{pmatrix} 10^4\,\mathrm{kg}$$
- Die Inverse der Modalmatrix erhält man dann als
    - $$\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{m}^{-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 9 & 15 & 3 \\ 16 & 0 & -8 \\ 15 & -15 & 5 \end{pmatrix}$$
- Anfangsbedingung in Hauptkoordinaten daher
    - $$\begin{aligned} \mathbf{y_0} &= \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{x_0} = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{y}}_\mathbf{0} &= \mathbf{\Phi}^{-1}\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0.750 \\ -2.000 \\ 1.250 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$
- Lösung in Hauptkoordinaten
    - $y_i = \hat{y}_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$
- Mit $y_0 = 0$ erhält man die Amplituden
    - $$\hat{y}_i = \left|\frac{\dot{y}_{i,0}}{\omega_i}\right| \quad \Rightarrow \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} 0.0581 \\ 0.0632 \\ 0.0323 \end{pmatrix} \mathrm{m}$$
- Für die Phasenverschiebung erhält man ±π/2, je nach Vorzeichen von $\dot{y}_{0,i}$
    - $$\varphi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\pi}{2}$$
- Gesamtlösung daher
    - $$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 0.0581\sin(\omega_1 t) \\ -0.0632\sin(\omega_2 t) \\ 0.0323\sin(\omega_3 t) \end{pmatrix} \mathrm{m}$$
- Graphisch:



- Lösung in Originalkoordinaten
  -

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \mathbf{\Phi y}(t) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.667 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0581\sin(12.91t/\mathrm{s}) \\ -0.0632\sin(31.62t/\mathrm{s}) \\ 0.0323\sin(38.73t/\mathrm{s}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.0581\sin(12.91t/\mathrm{s}) - 0.0632\sin(31.62t/\mathrm{s}) + 0.0323\sin(38.73t/\mathrm{s}) \\ 0.0968\sin(12.91t/\mathrm{s}) - 0.0323\sin(38.73t/\mathrm{s}) \\ 0.1162\sin(12.91t/\mathrm{s}) + 0.1897\sin(31.62t/\mathrm{s}) + 0.0645\sin(38.73t/\mathrm{s}) \end{pmatrix} \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

- Graphisch:



Lösung von Aufgabe 7

1. Eigenfrequenzen und -schwingungen:
   - Bewegungsgleichung des Gesamtsystems
     - $\mathbf{M}\ddot{\theta} + \mathbf{C}\theta = \mathbf{0}$
   - mit
     - $$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 50\,\mathrm{kg\,m}^2 \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 202 & -200 & 0 \\ -200 & 220 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{pmatrix} 50\,\mathrm{N\,m} \end{aligned}$$
   - Charakteristische Gleichung für $\eta = \omega$ s
     - $$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 202 - \eta^2 & -200 & 0 \\ -200 & 220 - \eta^2 & -20 \\ 0 & -20 & 20 - \eta^2 \end{pmatrix} = 0$$
   - Entwickeln nach der letzten Zeile liefert das Polynom
     - $\eta^6 - 442\eta^4 + 12480\eta^2 - 8000 = 0$
   - Nullstellen ergeben
     - $$\omega_1 = 0.810\,\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad \omega_2 = 5.441\,\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad \omega_3 = 20.29\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$
   - Eigenschwingungen als Lösungen der homogenen Gleichung
     - $(\omega_i^2\mathbf{M} - C)\hat{\theta} = \mathbf{0}$
   - ergibt
     - $$\hat{\theta}_1 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.007 \\ 1.041 \end{pmatrix}, \quad \hat{\theta}_2 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 0.862 \\ -1.794 \end{pmatrix}, \quad \hat{\theta}_3 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ -1.049 \\ 0.054 \end{pmatrix}$$
   - Interpretation
     - 1. Eigenschwingung: alle Scheiben drehen sich gleichartig, entspricht einer Rotation der ganzen Welle
     - 2. Eigenschwingung: Scheiben 1 und 2 bewegen sich zusammen gegen Scheibe 3
     - 3. Eigenschwingung: Scheiben 1 und 2 schwingen schnell gegeneinander, Scheibe 3 ist nahezu unbeteiligt
2. Bewegung der 1. Scheibe:
   - Angangsbedingungen

$$\dot{\theta}_3(0) = \frac{\pi}{30} n = 41.88 \, \frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\theta}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 41.88 \end{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}$$

- Modalmatrix ist

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 1.007 & 0.862 & -1.049 \\ 1.041 & -1.794 & 0.054 \end{pmatrix}$$

- Daraus erhält man die Massenelemente

$$\mathbf{m} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 154.8 & 0 & 0 \\ 0 & 248.1 & 0 \\ 0 & 0 & 105.1 \end{pmatrix} \mathrm{kg\,m^2}$$

- und die inverse Modalmatrix

$$\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{m}^{-1} \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.3229 & 0.3251 & 0.3361 \\ 0.2015 & 0.1737 & -0.3616 \\ 0.4756 & -0.4988 & 0.0255 \end{pmatrix}$$

- Anfangsbedingungen in Hauptkoordinaten

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{\Phi}^{-1} \theta(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{\Phi}^{-1} \dot{\theta}(0) = \begin{pmatrix} 14.08 \\ -15.15 \\ 1.067 \end{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}$$

- Amplituden $\hat{y}_i$ der i-ten Eigenschwingung

$$\hat{y}_i = \sqrt{y_i(0)^2 + \left(\frac{\dot{y}_i(0)}{\omega_i} \right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{y}_1 = 17.38, \quad \hat{y}_2 = 2.783, \quad \hat{y}_3 = 0.053$$

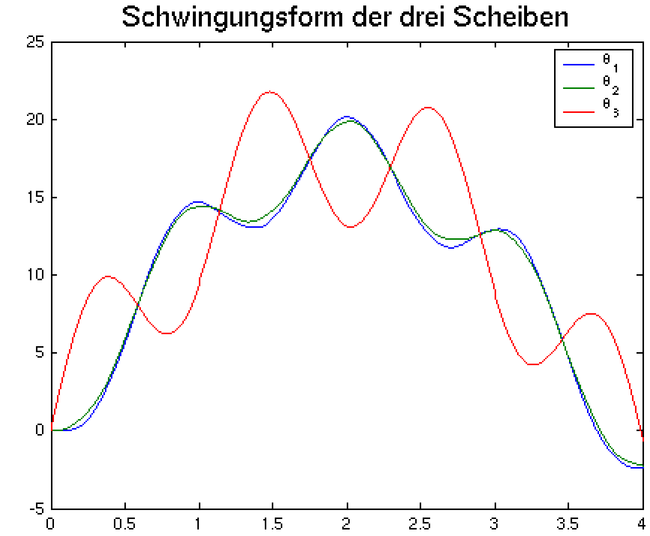
- Die Phase beträgt immer $\pm\pi/2$, je nach Vorzeichen von $\dot{y}_i(0)$, d.h. es sind reine Sinusschwingungen. In Hauptkoordinaten somit

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 17.38 \sin(\omega_1 t) \\ -2.783 \sin(\omega_2 t) \\ 0.053 \sin(\omega_3 t) \end{pmatrix}$$

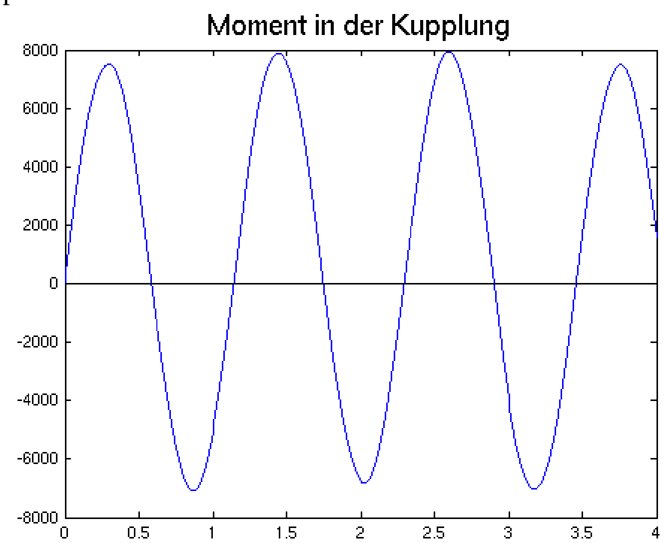
- Interpretation:
  - Sehr niedrige Grundschwingung ω_1 entspricht der sehr weichen Welle c_1: Die ganze Welle außer dem 1. Abschnitt dreht sich gleichförmig langsam hinundher.
  - Sehr steife Welle $c_3 \to$ 3. Eigenschwingung mit großem ω_3 wird kaum angeregt.
- Rücktransformation

- $\theta(t) = \mathbf{\Phi y}(t)$

- speziell für θ_1 erhält man
  - $\theta_1(t) = 17.38\sin(\omega_1 t) - 2.783\sin(\omega_2 t) + 0.053\sin(\omega_3 t)$
- graphisch für alle drei Scheiben



3. Kupplungsmoment:
   - M_k ist gegeben durch
     - $M_k = c_3(\theta_3 - \theta_2)$
   - graphisch



   - M_k schwingt nahezu harmonisch gemäß der 2. Eigenschwingung

Lösung von Aufgabe 8

- Lösung in Matlab im Skript ex8.m

Lösung von Aufgabe 9

1. Ohne Dämpfung:
   - Bewegungsgleichung
     - $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$
   - mit
     - $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{kg}\,, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$
   - charakteristische Gleichung für $\eta = \omega$ s
     - $\eta^4 - 16\eta^2 + 48 = 0$
   - Lösungen
     - $$\omega_1 = 2\,\frac{1}{\text{s}}\,, \qquad \omega_2 = 3.464\,\frac{1}{\text{s}}$$
   - Eigenfunktionen
     - $$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
2. Mit symmetrischer Dämpfung:
   - Bewegungsgleichung
     - $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$
   - mit M, C wie oben und
     - $$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$
   - charakteristische Gleichung
     - $\text{Det}(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{B} + \mathbf{C}) = 0$
   - einheitenlos: mit s^2/kg multiplizieren, $\eta = \lambda$ s $\rightarrow$
     - $$\begin{aligned} \text{Det}\begin{pmatrix} 2\eta^2 + 4\eta + 16 & -2\eta - 8 \\ -2\eta - 8 & 2\eta^2 + 4\eta + 16 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \eta^4 + 4\eta^3 + 19\eta^2 + 24\eta + 48 &= 0 \end{aligned}$$
   - Lösungen
     - $$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= (-0.500 \pm 1.936j)\,\frac{1}{\text{s}} \\ \lambda_{3,4} &= (-1.500 \pm 3.122j)\,\frac{1}{\text{s}} \end{aligned}$$
   - komplexe Eigenschwingung zu η_1

$$\begin{pmatrix} 2\eta_1^2 + 4\eta_1 + 16 & -2\eta_1 - 8 \\ -2\eta_1 - 8 & 2\eta_1^2 + 4\eta_1 + 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 7.000 - 3.873j & -7.000 + 3.873j \\ -7.000 + 3.873j & 7.000 - 3.873j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{pmatrix} = 0$$

- Setzen $\hat{z}_1 = 1 \Rightarrow \hat{z}_2 = 1$, also 1. Eigenvektor
  - $$\hat{\mathbf{z}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- ist schon reell, daher Polarzerlegung einfach
  - $r_i = z_i$, $\phi_i = 0$
- Damit reelle 1. Eigenschwingung
  - $$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.5t/\mathrm{s}} \cos(1.936t/\mathrm{s})$$
- Analog erhält man den 2. Eigenvektor
  - $$\hat{\mathbf{z}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
- also die 2. Eigenschwingung
  - $$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-1.5t/\mathrm{s}} \cos(3.122t/\mathrm{s})$$
- Aufgrund der Symmetrie der Dämpfer und Federn bringt die Dämpfung die Eigenschwingungen nicht durcheinander: Beide Massen schwingen wie in a., wobei sie jeweils mit Re λ gedämpft werden. Die Frequenzen sind durch die Dämpfung etwas verschoben worden.

3. Mit unsymmetrischer Dämpfung:
   - Bewegungsgleichung wie in b. mit
     - $$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$
   - charakteristische Gleichung (mit $\eta = \lambda$ s)
     - $\eta^4 + 3\eta^3 + 17\eta^2 + 16\eta + 48 = 0$
   - Lösungen
     - $$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= (-0.242 \pm 2.014j)\,\frac{1}{\mathrm{s}} \\ \lambda_{3,4} &= (-1.258 \pm 3.176j)\,\frac{1}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$
   - Eigenvektor zu λ_1
     - $$\hat{\mathbf{z}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.066 + 0.2412j \end{pmatrix}$$
   - in Polardarstellung

- $$\hat{\mathbf{z}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.0926\, e^{0.2225j} \end{pmatrix}$$
- reelle Lösung daher
  - $$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-0.242t/\mathrm{s}} \cos(2.014t/\mathrm{s}) \\ 1.0926\, e^{-0.242t/\mathrm{s}} \cos(2.014t/\mathrm{s} + 0.2225) \end{pmatrix}$$
- Eigenvektor zu λ_3
  - $$\hat{\mathbf{z}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.7657 + 0.2895j \end{pmatrix}$$
- in Polardarstellung
  - $$\hat{\mathbf{z}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.8186\, e^{2.780j} \end{pmatrix}$$
- also reelle Lösung
  - $$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-1.258t/\mathrm{s}} \cos(3.176t/\mathrm{s}) \\ 0.8186\, e^{-1.258t/\mathrm{s}} \cos(3.176t/\mathrm{s} + 2.780) \end{pmatrix}$$
- Dämpfung ist insgesamt kleiner als bei b. $\rightarrow$
  - $\mathrm{Re}(\lambda_i)$ sind kleiner als in b
  - $\mathrm{Im}(\lambda_i)$ sind fast wie in a
- keine Symmetrie $\rightarrow$ Dämpfung koppelt die Eigenschwingungen

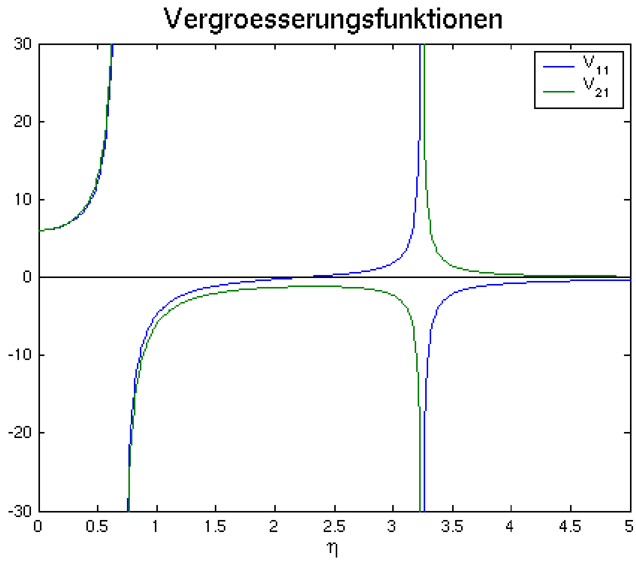
4. Anregung der 2. Eigenschwingung:
   - Die 2. Eigenschwingung und ihre Ableitung lauten
     - $$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{-\delta_2 t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t) \\ r_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) &= e^{-\delta_2 t} \begin{pmatrix} -\delta_2 \cos(\omega_2 t) - \omega_2 \sin(\omega_2 t) \\ -\delta_2 r_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) - \omega_2 r_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   - Einsetzen von t = 0 ergibt also mit den Werten aus c.
     - $$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \cos\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.7657 \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{x}}(0) &= \begin{pmatrix} -\delta_2 \\ -\delta_2 r_2 \cos\varphi_2 - \omega_2 r_2 \sin\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2579 \\ 0.0437 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 10

- Massen- und Steifigkeitsmatrix wie in Aufgabe 5:
  - $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{kg} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\,\mathrm{kg\,m^2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 16\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} & 4\,\mathrm{N} \\ 4\,\mathrm{N} & 10\,\mathrm{Nm} \end{pmatrix}$
- Die Kraft wirkt nur auf x, nicht auf ϕ, daher
  - $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5.0\,\mathrm{N} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2\,t/\mathrm{s})$
- Die Systemmatrix A lautet
  - $\mathbf{A} = -\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 4\,\mathrm{N} \\ 4\,\mathrm{N} & \frac{14}{3}\,\mathrm{Nm} \end{pmatrix}$
- Lösung des Gleichungssystems
  - $\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{F}}$
- ergibt
  - $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -0.1458\,\mathrm{m} \\ 0.1250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1458\,\mathrm{m} \\ 7.162° \end{pmatrix}$

Lösung von Aufgabe 11

1. Vergrößerungsfunktionen:
   - Fußpunkterregung
     - liefert Kraft nur auf die erste Masse
     - Phasenverschiebung zwischen u(t) und F(t)
     - Zeitnullpunkt so, dass F(t) keine Phase hat
   - Bewegungsgleichung
     - $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{F}}\cos(\Omega t)$
   - mit
     - $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} m, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} c, \qquad \hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - Standardansatz ergibt lineares Gleichungssystem
     - $(-\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{F}}$
   - Mit den Abkürzungen
     - $\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad \hat{f}_1 = \frac{\hat{F}_1}{m\omega_0^2}, \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$
   - lautet es
     - $\left[-\eta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - in Komponenten geschrieben
     - $\begin{aligned} (6-\eta^2)\hat{x}_1 - 5\hat{x}_2 &= \hat{f}_1 \\ -5\hat{x}_1 + (5-\eta^2)\hat{x}_2 &= 0 \end{aligned}$
   - Auflösen nach $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ ergibt
     - $\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \frac{5-\eta^2}{(5-\eta^2)(6-\eta^2)-25}\hat{f}_1 \\ \hat{x}_2 &= \frac{5}{(5-\eta^2)(6-\eta^2)-25}\hat{f}_1 \end{aligned}$
   - Vergrößerungsfunktionen also
     - $\begin{aligned} V_{11} &= \frac{1}{m\omega_0^2}\frac{5-\eta^2}{(5-\eta^2)(6-\eta^2)-25} \\ V_{21} &= \frac{1}{m\omega_0^2}\frac{5}{(5-\eta^2)(6-\eta^2)-25} \end{aligned}$
   - graphisch (ohne den Skalenfaktor)



2. Tilgungsfrequenzen:
   - Masse m_i ist in Ruhe bei Nullstellen von V_{i1}
   - Tilgung für Masse m_1 daher bei
     - $\eta = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \Omega = 2.236\,\omega_0$
   - Masse m_2 ist nie in Ruhe

Lösung von Aufgabe 12

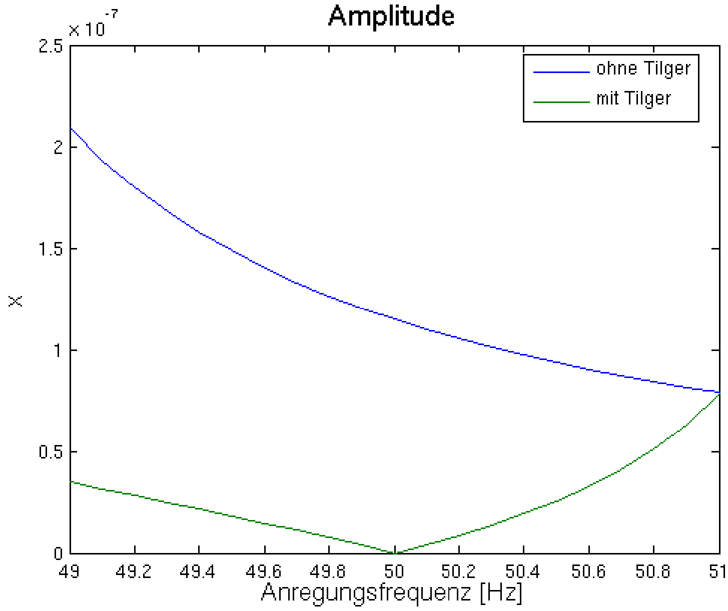
- Der Aufbau der Maschine entspricht einer einfachen Schwingerkette (wie in Aufgabe 11) mit den Werten
  - m_1 = 1000 kg, m_2 = 10 kg, $c_1 = 9 \cdot 10^7$ N/m
- und unbekannter Federkonstanten c_2
- Die Matrizen sind dann
  - $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- das Gleichungssystem für die Amplituden lautet daher
  - $$\begin{aligned} (c_1 + c_2 - m_1\Omega^2)\hat{x}_1 - c_2\hat{x}_2 &= \hat{F}_1 && (I) \\ -c_2\hat{x}_1 + (c_2 - m_2\Omega^2)\hat{x}_2 &= 0 && (II) \end{aligned}$$
- Nach $\hat{x}_1$ auflösen liefert
  - $$\hat{x}_1 = \frac{c_2 - m_2\Omega^2}{(c_1 + c_2 - m_1\Omega^2)(c_2 - m_2\Omega^2) - c_2^2}\hat{F}_1$$
- Die Amplitude $\hat{x}_1$ verschwindet bei
  - $c_2 - m_2\Omega^2 = 0$
- also ergibt sich für die gesuchte Federkonstante
  - $$c_2 = m_2\Omega^2 = 10\,\mathrm{kg}\left(2\pi\, 50\,\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 = 9.870 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$
- Zum Vergleich des Verhaltens bei Ω_2 ohne bzw. mit Tilger wird die Kraftamplitude beliebig gewählt, z. B.
  - $$\hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 1\,\mathrm{N} \\ 0 \end{pmatrix}$$
- Amplitude ohne Tilger (eindimensionales System)
  - $$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} = 300\,\frac{1}{\mathrm{s}} \\ \eta &= \frac{\Omega_2}{\omega_0} = 1.0535 \\ \hat{f}_E &= \frac{\hat{F}_1}{m_1\omega_0^2} = 1.111 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m} \\ V &= \frac{1}{|1 - \eta^2|} = 9.1057 \\ \hat{x}_1 &= \hat{f}_E V = 1.012 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$
- Amplitude mit Tilger

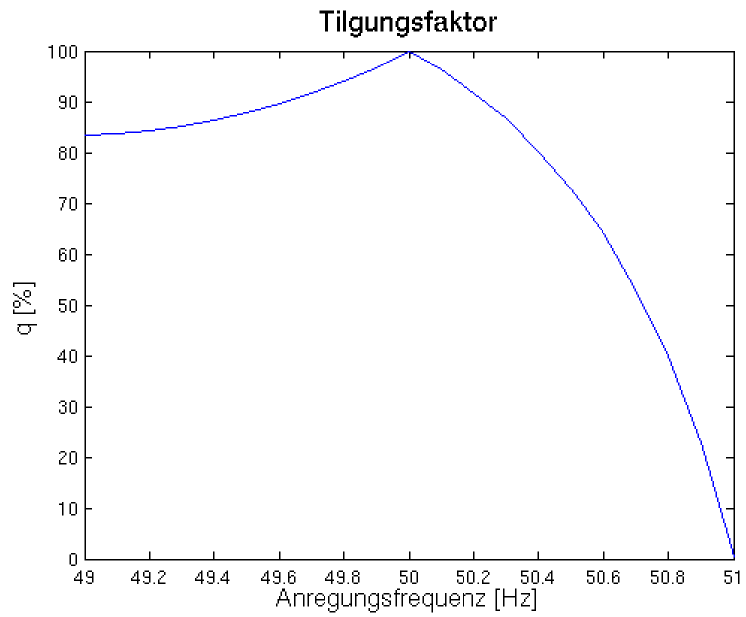
$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \mathrm{kg}\,, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9.0987 & -0.0987 \\ -0.0987 & 0.0987 \end{pmatrix} \cdot 10^7 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \\
\mathbf{A} &= -\Omega_2^2 \mathbf{M} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -8.8970 & -0.9870 \\ -0.9870 & -0.0119 \end{pmatrix} \cdot 10^6 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \\
\hat{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 1.368 \cdot 10^{-8} \\ -1.137 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

- Tilgung

$$
q = 1 - \frac{\hat{x}_1}{|\hat{x}_{2,1}|} = 86.48\%
$$

- Rechnung mit Matlab für einen Bereich von Erregerfrequenzen zeigt das Verhalten des Tilgers




Tilgungsfaktor
q [%]
Anregungsfrequenz [Hz]
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
49
49.2
49.4
49.6
49.8
50
50.2
50.4
50.6
50.8
51

Lösung von Aufgabe 13

1. Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen:
   - Matrizen der Bewegungsgleichung
     - $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{kg}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2.3 & -1 & 0 \\ -1 & 2.3 & -1 \\ 0 & -1 & 1.3 \end{pmatrix} \mathrm{N/m}$$
   - charakteristisches Polynom in $\eta = \omega s$
     - $\eta^6 - 5.9\eta^4 + 9.27\eta^2 - 3.277 = 0$
   - Eigenfrequenzen durch (numerische) Lösung des charakteristischen Polynoms
     - $\omega_1 = 0.706$ 1/s
     - $\omega_2 = 1.362$ 1/s
     - $\omega_3 = 1.883$ 1/s
   - Eigenschwingungen durch Lösung des homogenen Systems, wobei (nachträglich) so normiert wurde, dass der größte Wert 1 ist
     - $$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 0.445 \\ 0.802 \\ 1.000 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 0.445 \\ -0.802 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} -0.802 \\ 1.000 \\ -0.445 \end{pmatrix}$$
2. Bestimmung der Vergrößerungsfunktionen durch Modalanalyse:
   - Modalmatrix
     - $$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 0.445 & 1.000 & -0.802 \\ 0.802 & 0.445 & 1.000 \\ 1.000 & -0.802 & -0.445 \end{pmatrix}$$
   - Massenmatrix m
     - $$\mathbf{m} = \mathbf{\Phi}^\mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1.8412 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8412 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8412 \end{pmatrix} \mathrm{kg}$$
   - modale Anregungen
     - $$\hat{\mathbf{F}}_\mathbf{m} = \mathbf{\Phi}^\mathbf{T} \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.445 \\ 1.000 \\ -0.802 \end{pmatrix} \hat{F}_1$$
   - Lösung in Hauptkoordinaten

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{0.2417}{\omega_1^2 - \Omega^2} \\ \dfrac{0.5431}{\omega_2^2 - \Omega^2} \\ \dfrac{-0.4356}{\omega_3^2 - \Omega^2} \end{pmatrix} \frac{\hat{F}_1}{\mathrm{kg}} \cos(\Omega t)$$

- ○

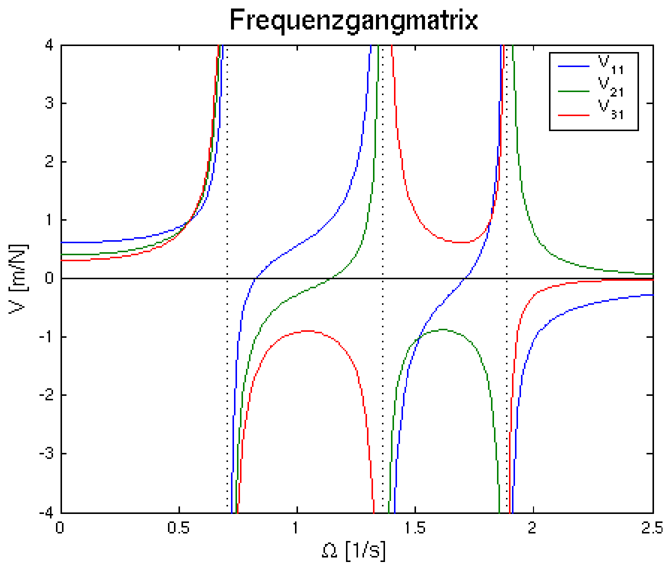
- Rücktransformation liefert die Vergrößerungsfunktionen

$$\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi} \begin{pmatrix} \dfrac{0.2417}{\omega_1^2 - \Omega^2} \\ \dfrac{0.5431}{\omega_2^2 - \Omega^2} \\ \dfrac{-0.4356}{\omega_3^2 - \Omega^2} \end{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{kg}}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{0.1076}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \dfrac{0.5431}{\omega_2^2 - \Omega^2} + \dfrac{0.3493}{\omega_3^2 - \Omega^2} \\ \dfrac{0.1938}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \dfrac{0.2417}{\omega_2^2 - \Omega^2} - \dfrac{0.4356}{\omega_3^2 - \Omega^2} \\ \dfrac{0.2417}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \dfrac{0.4356}{\omega_2^2 - \Omega^2} + \dfrac{0.1938}{\omega_3^2 - \Omega^2} \end{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{kg}}$$

- ○

- graphisch



Lösung von Aufgabe 14

- θ_1 und θ_2 beschreiben die Winkelauslenkung der Scheiben aus der Gleichgewichtslage.
- Drehmomente M_i auf die Scheiben sind
  - $$\begin{aligned} M_1 &= -c_1\theta_1 - c_2(\theta_1 - \theta_2) \\ M_2 &= -c_2(\theta_2 - \theta_1) + M(t) \end{aligned}$$
- Bewegungsgleichungen
  - $$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 + (c_1 + c_2)\theta_1 - c_2\theta_2 &= 0 \\ J_2\ddot{\theta}_2 - c_2\theta_1 + c_2\theta_2 &= M(t) \end{aligned}$$
- in Matrixform
  - $\mathbf{M}\ddot{\theta} + \mathbf{C}\theta = \mathbf{F}$
- mit
  - $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_0 \cos(\Omega t) \end{pmatrix}$$
- Werte einsetzen → Eigenwertanalyse ergibt
  - ω_1 = 154.7 1/s
  - ω_2 = 555.3 1/s
  - $$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 0.7406 & 1.000 \\ 1.000 & -0.4272 \end{pmatrix}$$
- modale Anregungen
  - $$\hat{\mathbf{F}}_\mathbf{m} = \mathbf{\Phi}^\mathbf{T}\hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 50.00 \\ -21.36 \end{pmatrix} \text{Nm}$$
- Massenmatrix
  - $$\mathbf{m} = \mathbf{\Phi}^\mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 3.423 & 0 \\ 0 & 1.975 \end{pmatrix} \text{kg m}^2$$
- Amplituden der Eigenschwingungen
  - $$\hat{\mathbf{y}} = (\omega^2 - \Omega^2)^{-1}\mathbf{m}^{-1}\hat{\mathbf{F}}_\mathbf{m} = \begin{pmatrix} -2.950 \\ -0.039 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$
- Ω liegt dicht bei ω_1 → fast nur die erste Eigenschwingung ist angeregt.
- Umrechnung in Originalkoordinaten
  - $$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} -2.223 \\ -2.933 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$
- Die Amplitude der Drehschwingungen der ersten Scheibe beträgt somit
  - $\hat{\theta}_1 = \hat{x}_1 = -2.223 \cdot 10^{-3}\,\text{rad} = -0.1274°$

Lösung von Aufgabe 15

1. Schwingungsamplitude:
   - Die Erregerkraft ergibt sich aus der Amplitude der Fußpunkterregung zu
     - $\hat{F}_1 = \hat{u}\sqrt{c_1^2 + b_1^2\Omega^2} = 21.04\,\mathrm{N}$
   - Bewegungsgleichung in Matrixform damit
     - $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{F}}\cos(\Omega t)$
   - mit
     - $$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}\mathrm{kg}\,, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 500 & -100 \\ -100 & 100 \end{pmatrix}\mathrm{Ns/m}\,, \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} 10^5\,\mathrm{N/m}\,, \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 21.04 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{N} \end{aligned}$$
   - Der komplexe Ansatz führt auf das Gleichungssystem
     - $(-\Omega^2\mathbf{M} + j\Omega\mathbf{B} + \mathbf{C})\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{F}}$
   - Einsetzen der konkreten Matrizen und Auflösen nach $\hat{\mathbf{z}}$ liefert (nach endlicher Rechnung)
     - $$\hat{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} -0.0113 - 0.0202j \\ 0.0483 + 0.1953j \end{pmatrix}\mathrm{mm}$$
   - bzw. in Polardarstellung
     - $$\hat{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0.0232\,e^{-2.079j} \\ 0.2012\,e^{1.328j} \end{pmatrix}\mathrm{mm}$$
   - x(t) ergibt sich als Realteil dann zu
     - $$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0.0232\cos(\Omega t - 2.079) \\ 0.2012\cos(\Omega t + 1.383) \end{pmatrix}\mathrm{mm}$$
   - Die Amplitude $\hat{x}_2$ der Schwingungen des Oberteils beträgt also 0.2012 mm.
2. Maximale Annäherung von Oberteil und Sockel:
   - Abstand beider Teile (gegenüber Ruhelage) beträgt

     $\Delta x(t) = x_2(t) - x_1(t)$

     $= 0.2012\text{ mm}\cos(\Omega\, t + 1.3828) - 0.0232\text{ mm}\cos(\Omega\, t - 2.079)$

   - Kombination der beiden Schwingungen liefert
     - $\Delta x(t) = 0.2236\text{ mm}\cos(\Omega\, t + 1.301)$
   - Beide Teile nähern sich um 0.2236 mm gegenüber der Ruhelage an.

Lösung von Aufgabe 16

1. Bewegungsgleichungen:
   - Kräfte- und Momentenbilanz um den Schwerpunkt S bzw. für die Radkästen
     - $$\begin{aligned} m_A\ddot{x} &= -c_1(x_1-x_3)-c_1(x_2-x_4)-b_1(\dot{x}_1-\dot{x}_3)-b_1(\dot{x}_2-\dot{x}_4) \\ J\ddot{\varphi} &= -s_1c_1(x_1-x_3)+s_2c_1(x_2-x_4)-s_1b_1(\dot{x}_1-\dot{x}_3)+s_2b_1(\dot{x}_2-\dot{x}_4) \\ m_R\ddot{x}_3 &= -c_1(x_3-x_1)-c_2x_3-b_1(\dot{x}_3-\dot{x}_1)-b_2\dot{x}_3+F(t) \\ m_R\ddot{x}_4 &= -c_1(x_4-x_2)-c_2x_4-b_1(\dot{x}_4-\dot{x}_2)-b_2\dot{x}_4+F(t) \end{aligned}$$
   - für kleine Auslenkungen ist der Zusammenhang zwischen $x_{1,2}$ und x, ϕ
     - $$\begin{aligned} x_1 &= x+s_1\varphi \\ x_2 &= x-s_2\varphi \end{aligned}$$
   - Eliminieren von $x_{1,2}$ und Umsortieren liefert die bekannte Matrixform
     - $$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{C}\mathbf{x}=\hat{\mathbf{F}}\cos(\Omega t)$$
   - mit den Matrizen
     - $$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} m_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_R \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 2b_1 & b_1(s_1-s_2) & -b_1 & -b_1 \\ b_1(s_1-s_2) & b_1(s_1^2+s_2^2) & -b_1s_1 & b_1s_2 \\ -b_1 & -b_1s_1 & b_1+b_2 & 0 \\ -b_1 & b_1s_2 & 0 & b_1+b_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 2c_1 & c_1(s_1-s_2) & -c_1 & -c_1 \\ c_1(s_1-s_2) & c_1(s_1^2+s_2^2) & -c_1s_1 & c_1s_2 \\ -c_1 & -c_1s_1 & c_1+c_2 & 0 \\ -c_1 & c_1s_2 & 0 & c_1+c_2 \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{F}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0 \\ F_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
2. Eigenwerte und Modalmatrix für B = 0:
   - Numerische Lösung des Eigenwert-Problems liefert

$$\omega = \begin{pmatrix} 12.0990 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27.5394 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 131.4500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 143.5057 \end{pmatrix}$$

- $$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 0.9983 & 0.0990 & -0.0370 & -0.0244 \\ -0.2408 & 0.3647 & 0.0089 & -0.0900 \\ 0.2227 & 1.0000 & 0.2227 & 1.0000 \\ 1.0000 & -0.2227 & 1.0000 & -0.2227 \end{pmatrix}$$

3. Modaltransformationen:
   - Transformation der Matrizen und Vektoren mit Φ ergibt

$$\mathbf{m} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 880.8793 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 159.0414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32.6558 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 39.2619 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1.0316 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9650 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5141 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.4684 \end{pmatrix} \cdot 10^3$$

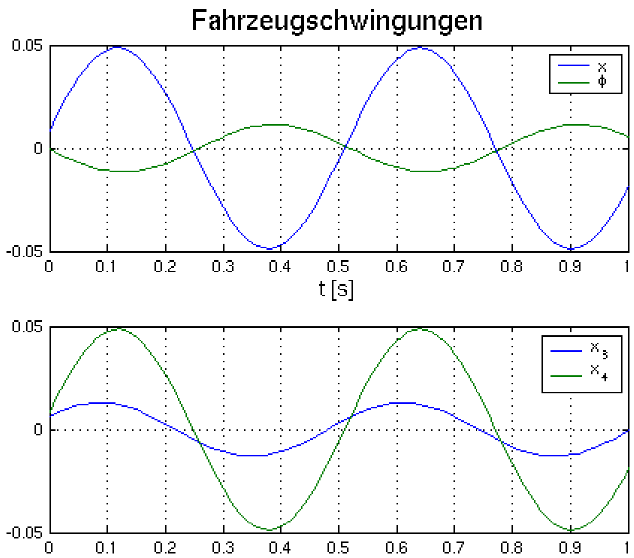
$$\mathbf{c} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 1.2895 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2062 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.6426 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.0855 \end{pmatrix} \cdot 10^5$$

- $$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 611.3731 \\ 388.6269 \\ 611.3731 \\ 388.6269 \end{pmatrix}$$

   - Beobachtung: Auch die Matrix B wird durch Φ diagonalisiert.
   - Ursache: Es liegt proportionale Dämpfung vor mit
     - B = γ C
   - Modaltransformation entkoppelt daher die Bewegungsgleichungen vollständig in
     - $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{b}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{c}\mathbf{y} = \hat{\mathbf{f}}\cos(\Omega t)$
4. Lösung der Bewegungsgleichungen:
   - Lösung in Hauptkoordinaten wie im 1d-Fall: komplexer Ansatz
     - $\mathbf{z}(t) = \hat{\mathbf{z}}e^{j\Omega t}$
   - ergibt
     - $$\hat{z}_i = \frac{\hat{f}_i}{-\Omega^2 m_i + j\Omega b_i + c_i}$$
   - Einsetzen der Werte →

- $$\hat{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0.8148 - 4.8005i \\ 0.3922 - 0.0465i \\ 0.1082 - 0.0105i \\ 0.0480 - 0.0046i \end{pmatrix} \cdot 0.01$$

- in Polardarstellung ist dies
  - $$\hat{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 4.8691 e^{-1.4027j} \\ 0.3949 e^{-0.1179j} \\ 0.1088 e^{-0.0965j} \\ 0.0482 e^{-0.0964j} \end{pmatrix} \cdot 0.01$$
- Lösung in Hauptkoordinaten somit
  - $$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 4.8691 \cos(\Omega t - 1.4027j) \\ 0.3949 \cos(\Omega t - 0.1179j) \\ 0.1088 \cos(\Omega t - 0.0965j) \\ 0.0482 \cos(\Omega t - 0.0964j) \end{pmatrix} \cdot 0.01$$
- Rücktransformation von y erfordert Zusammenfassen der Cosinus-Funktionen. Dies geht wesentlich einfacher im Komplexen, indem man erst die z-Amplituden zurücktransformiert und dann den Realteil nimmt:
  - $$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathrm{Re} \boldsymbol{\Phi} \hat{\mathbf{z}} e^{j\Omega t} \\ &= \mathrm{Re} \begin{pmatrix} 0.0085 - 0.0480i \\ -0.0006 + 0.0114i \\ 0.0065 - 0.0112i \\ 0.0083 - 0.0480i \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0487 \cos(\Omega t - 1.3960j) \\ 0.0114 \cos(\Omega t + 1.6203j) \\ 0.0130 \cos(\Omega t - 1.0488j) \\ 0.0487 \cos(\Omega t - 1.4006j) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
- im Bild



- Amplituden der Hubschwingung
  - $\hat{x} = 4.87$ cm,
- der Nickschwingung
  - $\hat{\varphi} = 0.0114 \triangleq 0.65°$
- Interessanterweise schwingt der rechte Radkasten wesentlich stärker als der linke.

Lösung von Aufgabe 17

- Stoffwerte von Stahl aus der Literatur:
  - $\rho = 7700\ \mathrm{kg/m}^3$
  - $G = 79.3 \cdot 10^9\ \mathrm{N/m}^2$
- daher beträgt die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit für Torsionswellen
  - $$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3.209 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
- Aus den Randbedingungen folgt sofort
  - $Q(0) = 0$
  - $Q'(L) = 0$
- Einsetzen in
  - $$Q(x) = \hat{Q}_c \cos(kx) + \hat{Q}_s \sin(kx)$$
- liefert
  - $$\begin{aligned} \hat{Q}_c &= 0 \\ \cos(kL) &= 0 \end{aligned}$$
- also
  - $$k = \frac{\pi}{2L}(2n+1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
- somit
  - $$\omega = ck = \frac{c\pi}{2L}(2n+1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
- Die niedrigsten drei Eigenfrequenzen sind daher
  - f_1 =1.003 kHz
  - f_2 = 3.009 kHz
  - f_3 = 5.014 kHz

Lösung von Aufgabe 18

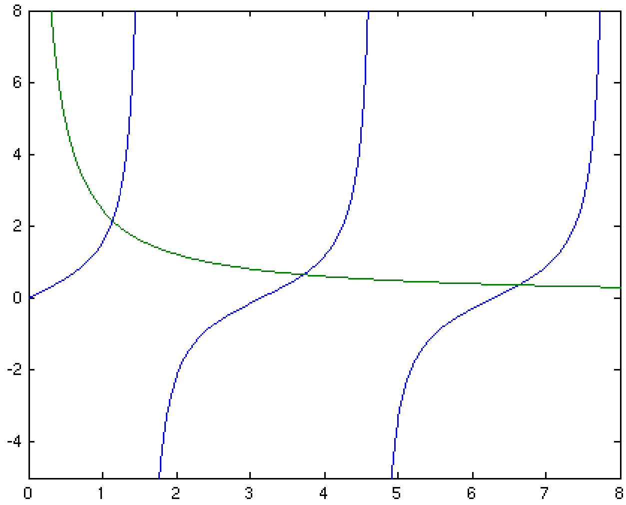
1. Randbedingungen:
   - Skizze

   - Randbedingung bei 0
     - q(0, t) = 0
   - Kraft auf den Propeller bei L aufgrund der Longitudinalschwingung der Welle
     - $F_W = -EA\frac{\partial q}{\partial x}(L,t)$
   - Trägheitskraft der Masse
     - $F_m = -m\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(L,t)$
   - Insgesamt gilt also als weitere Randbedingung
     - $EA\frac{\partial q}{\partial x}(L,t) + m\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(L,t) = 0$
2. Beziehung für die Eigenfrequenzen:
   - Produktansatz war
     - $$\begin{aligned} q(x,t) &= Q(x)T(t) \\ &= (\hat{Q}_c\cos(kx) + \hat{Q}_s\sin(kx))\cos(\omega t - \beta) \end{aligned}$$
   - Einsetzen in die Randbedingung bei 0 ergibt
     - $\hat{Q}_c = 0$
   - Aus der Randbedingung bei L ergibt sich durch die entsprechenden Ableitungen
     - $\left(EA\hat{Q}_s k\cos(kL) - m\omega^2\hat{Q}_s\sin(kL)\right)\cos(\omega t - \beta) = 0$
   - Mit
     - $k = \frac{\omega}{c}$
   - und
     - $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
   - erhält man

- $$\omega \tan\left(\omega L\sqrt{\frac{\rho}{E}}\right) = \frac{A}{m}\sqrt{E\rho}$$

3. Näherungslösungen der ersten drei Eigenfrequenzen:
   - Sei die dimensionslose Größe κ gegeben durch
     - $$\kappa := L\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega$$
   - Dann wird aus der Beziehung für ω
     - $$\kappa \tan\kappa = \frac{AL\rho}{m} = 2.45$$
   - Für eine graphische Näherungslösungen schreibt man dies am einfachsten als
     - $$\tan\kappa = \frac{2.45}{\kappa}$$
   - und bestimmt die Schnittpunkte der beiden Graphen



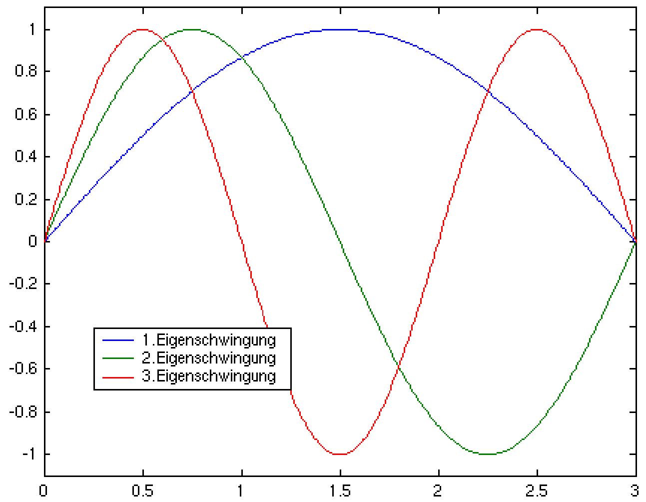
   - Durch numerische Verfahren (z.B. Newton-Iteration) erhält man für die ersten drei Schnittpunkte
     - $\kappa_1 = 1.137$
     - $\kappa_2 = 3.724$
     - $\kappa_3 = 6.637$
   - Wegen
     - $$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{\kappa}{L}$$
   - erhält man daraus die Kreisfrequenzen der ersten drei Eigenschwingungen
     - $\omega_1 = 294.9$ 1/s
     - $\omega_2 = 966.0$ 1/s
     - $\omega_3 = 1721.9$ 1/s

Lösung von Aufgabe 19

1. Eigenfrequenzen:
    - Fläche und polares Trägheitsmoment der quadratischen Querschnittsfläche
        - $$\begin{aligned} A &= a^2 = 9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \\ I &= \frac{1}{12}a^4 = 6.75 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}^4 \end{aligned}$$
    - damit ergibt sich
        - c = 44.94 m^2/s
    - Randbedingungen beim gestützen Balken
        - Q(0) = 0, Q''(0) = 0, Q(L) = 0, Q''(L) = 0
    - Ableiten der allgemeinen Lösung für Q(x) liefert
        - $$Q''(x) = \mu^2(-\hat{Q}_c\cos(\mu x) - \hat{Q}_s\sin(\mu x) + \hat{Q}_{ch}\cosh(\mu x) + \hat{Q}_{sh}\sinh(\mu x))$$
    - Einsetzen der Randbedingungen bei 0 ergibt
        - $$\begin{aligned} \hat{Q}_c + \hat{Q}_{ch} &= 0 \\ -\hat{Q}_c + \hat{Q}_{ch} &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \hat{Q}_c &= \hat{Q}_{ch} = 0 \end{aligned}$$
    - Randbedingungen bei L liefern
        - $$\begin{aligned} \hat{Q}_s\sin(\mu L) + \hat{Q}_{sh}\sinh(\mu L) &= 0 \\ -\hat{Q}_s\sin(\mu L) + \hat{Q}_{sh}\sinh(\mu L) &= 0 \end{aligned}$$
    - Addition beider Gleichungen →
        - $$\hat{Q}_{sh}\sinh(\mu L) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{Q}_{sh} = 0$$
    - da sinh(x) ≠ 0 für x ≠ 0
    - Damit ergeben sich nichttriviale Lösungen nur für
        - $$\sin(\mu L) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mu_i = i\frac{\pi}{L} \qquad i = 1, 2, \ldots$$
    - Eigenfrequenzen sind also
        - $$\omega_i = c\mu_i^2 = c\frac{\pi^2}{L^2}i^2 \qquad i = 1, 2, \ldots$$
    - mit den angegebenen Werten daher
        - ω_1 = 49.28 1/s
        - ω_2 = 197.1 1/s
        - ω_3 = 443.5 1/s
2. Eigenschwingungen:
    - Einsetzen der Koeffizienten $\hat{Q}$ in Q(x) liefert die Lösungen

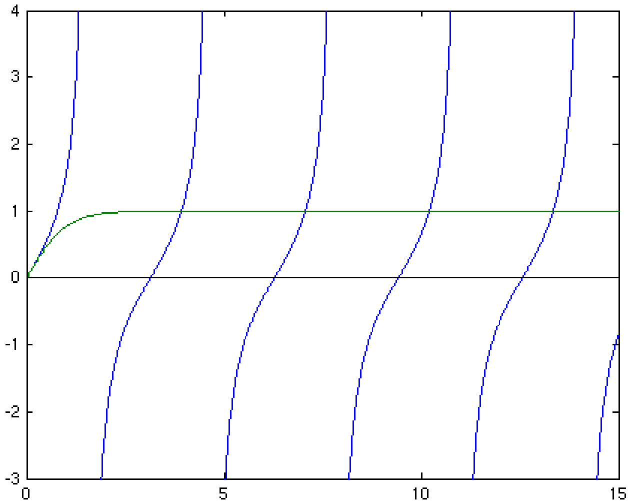
- $$Q_i(x) = \sin\left(i\pi\frac{x}{L}\right)$$

- graphisch



Lösung von Aufgabe 20

- Randbedingungen: gestützt bei 0, frei bei L →
  - Q(0) = 0, Q''(0) = 0, Q''(L) = 0, Q'''(L) = 0
- Randbedingungen bei 0 in allgemeine Lösung für Q(x) eingesetzt →
  - $$\begin{aligned} \hat{Q}_c + \hat{Q}_{ch} &= 0 \\ -\hat{Q}_c + \hat{Q}_{ch} &= 0 \end{aligned}$$
- Daraus folgt sofort
  - $\hat{Q}_c = \hat{Q}_{ch} = 0$
- Randbedingungen bei L ergeben mit $\kappa = \mu L$
  - $$\begin{aligned} \hat{Q}_s \sin\kappa &= \hat{Q}_{sh} \sinh\kappa \\ \hat{Q}_s \cos\kappa &= \hat{Q}_{sh} \cosh\kappa \end{aligned}$$
- Division beider Gleichungen liefert dann
  - $\tan\kappa = \tanh\kappa$
- graphisch



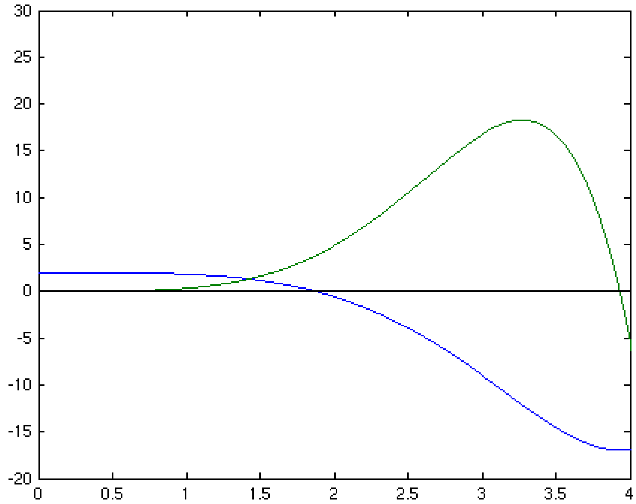
- numerisch erhält man
  - $\kappa_1 = 3.9266$
  - $\kappa_i \approx (i + 1/4)\,\pi,\ i \geq 2$
- Eigenfrequenzen daraus wieder mit
  - $$\omega_i = \frac{c}{L^2}\kappa_i^2$$

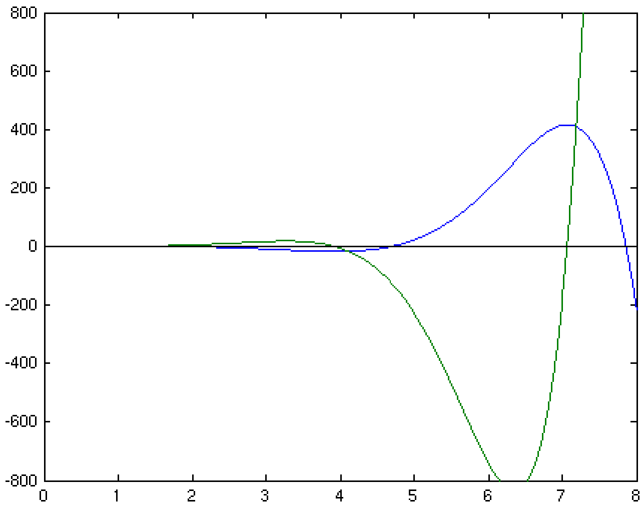
Lösung von Aufgabe 21

- Die Randbedingungen bei 0 bei fester Einspannung sind
  - Q(0) = 0, Q'(0) = 0
- Kräftegleichgewicht der Masse m am Ende des Balkens
  - $$\begin{aligned} m\ddot{q}(L,t) &= -Q_z(L,t) \\ &= -M'(L,t) \\ &= EIq'''(L,t) \end{aligned}$$
- Weiterhin gilt die Momentenfreiheit am freien Ende
  - $q''(L,t) = 0$
- Geht man mit dem Produktansatz
  - $q(x,t) = Q(x)\cos(\omega t - \beta)$
- in die dynamische Randbedingung bei L ein, folgt
  - $-m\omega^2 Q(L) = EIQ'''(L)$
- Setzt man alle vier Randbedingungen in die allgemeine Form von Q(x) ein, ergeben sich - wieder mit $\kappa = \mu L$ - die folgenden Gleichungen
  - $$\begin{aligned} \hat{Q}_c + \hat{Q}_{ch} &= 0 \\ \hat{Q}_s + \hat{Q}_{sh} &= 0 \\ -\hat{Q}_c \cos\kappa - \hat{Q}_s \sin\kappa + \hat{Q}_{ch}\cosh\kappa + \hat{Q}_{sh}\sinh\kappa &= 0 \\ -\frac{m\omega^2}{EI\mu^3}\left[\hat{Q}_c\cos\kappa + \hat{Q}_s\sin\kappa + \hat{Q}_{ch}\cosh\kappa + \hat{Q}_{sh}\sinh\kappa\right] - & \\ \left[\hat{Q}_c\sin\kappa\hat{Q}_s\cos\kappa + \hat{Q}_{ch}\sinh\kappa + \hat{Q}_{sh}\cosh\kappa\right] &= 0 \end{aligned}$$
- Der Vorfaktor vor der eckigen Klammer kann mit den Beziehungen
  - $$\begin{aligned} \omega &= c\mu^2 \\ c^2 &= \frac{EI}{\rho A} \end{aligned}$$
- umgeschrieben werden zu
  - $$\begin{aligned} \frac{m\omega^2}{EI\mu^3} &= \frac{mc^2\mu}{EI} = \frac{m\mu}{\rho A} \\ &= \frac{m}{\rho AL}\kappa =: \gamma\kappa \end{aligned}$$
- wobei mit den gegebenen Werten
  - $\gamma = \frac{m}{\rho AL} = 0.493$
- Damit lautet die 4. Gleichung

- $$\begin{aligned} &\hat{Q}_c(\sin\kappa + \gamma\kappa\cos\kappa) + \hat{Q}_s(-\cos\kappa + \gamma\kappa\sin\kappa) + \\ &\qquad \hat{Q}_{ch}(\sinh\kappa + \gamma\kappa\cosh\kappa) + \hat{Q}_{sh}(\cosh\kappa + \gamma\kappa\sinh\kappa) \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

- Nun werden die ersten zwei Gleichungen benutzt, um die Variablen $\hat{Q}_{ch}$ und $\hat{Q}_{sh}$ zu elimieren. Es bleiben die folgenden zwei Gleichungen übrig:
  - $$\begin{aligned} \hat{Q}_c(\cos\kappa + \cosh\kappa) + \hat{Q}_s(\sin\kappa + \sinh\kappa) &= 0 \\ \hat{Q}_c\left[(\sin\kappa - \sinh\kappa) + \gamma\kappa(\cos\kappa - \cosh\kappa)\right] + & \\ \hat{Q}_s\left[-(\cos\kappa + \cosh\kappa) + \gamma\kappa(\sin\kappa - \sinh\kappa)\right] &= 0 \end{aligned}$$
- Damit nicht-triviale Lösungen existieren, muss die Systemdeterminante verschwinden. Nach etwas Rechnerei ergibt sich daraus
  - $(1 + \cos\kappa\cosh\kappa) + \gamma\kappa(\cos\kappa\sinh\kappa - \sin\kappa\cosh\kappa) = 0$
- Die Lösungen dieser transzendenten Gleichung lassen sich für gegebenes γ wieder graphisch oder numerisch bestimmen.
- graphisch als Schnittpunkte von
  - $$\begin{aligned} f_1(x) &= (1 + \cos x\cosh x) \\ f_2(x) &= -\gamma x(\cos x\sinh x - \sin x\cosh x) \end{aligned}$$
- ergibt stark angefachte Schwingungen





- numerisch mit Startwerten aus der Graphik
    - $\kappa_1 = 1.423$
    - $\kappa_2 = 4.113$
    - $\kappa_3 = 7.192$
- daraus ergeben sich die Eigenfrequenzen zu
    - $\omega_1 = 436.1$ 1/s
    - $\omega_2 = 3642$ 1/s
    - $\omega_3 = 11140$ 1/s