Statisch Unbestimmte Systeme

0. Inhalt

1. Allgemeines

Kurzbeschreibung

Schnittgrößen in statisch unbestimmten Systemen

Einordnung

Baustatik – Grundlagen – unbestimmte Systeme

Lernziele

Schnittgrößen von statisch unbestimmt gelagerten Balkentragwerken ermitteln können

Einschränkungen, Abgrenzung

Es werden nur reversible Verformungen betrachtet, bleibende/plastische

HS Augsburg – Studiengang Bauingenieur
Baumgartner Str. 16, D-86161 Augsburg
Tel. +49(0) 821 – 5586 – 3171, Fax – 3913
peter.knoedel@hs-augsburg.de

Bearbeiter: Prof. Dr. P. Knödel
Bearbeitungsstand: 20.11.2009
Druck 14.01.10 07:03
C:\user\FHA\BSt\Skript\GrA\Unbe\Unbe_09-11-20.doc

Verformungen werden nicht berücksichtigt;

Stabilitätsphänomene sind ausgeschlossen;

2. Begriffe

Kräfte — je nach Zusammenhang werden mit diesem Begriff auch Momente beschrieben

Verformung — Oberbegriff für die Deformation/Formänderung eines Körpers in allen Raumrichtungen

Schreibweise

Indizes werden vereinfachend durch Komma abgetrennt, z.B.

$\gamma,M2 = \gamma_{M2}$ lies: gamma Index M2

3. Grundlagen

Baustatik I — Gleichgewichtszustand eines Körpers

Baustatik II — Biegelinie von Balken

4. Freischneiden

4.1 Darstellung des Verfahrens am Zweifeldträger

Die Grundlagen des Verfahrens werden an einem unsymmetrischen Durchlaufträger über zwei Felder entwickelt.

1. Schritt

System und Belastung:

Linkes Feld:

$L,1 = 6$ m

$q,1 = 20$ kN/m

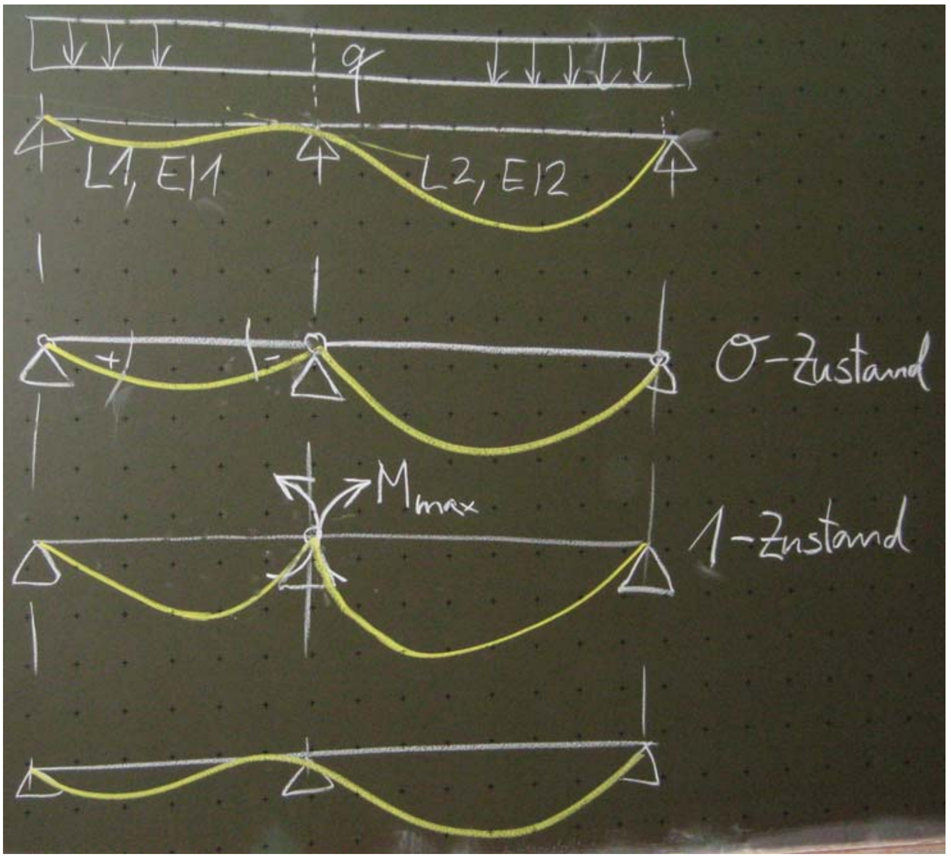
$I,1 = 23100$ cm^4 (IPE 400, Stahl)

Rechtes Feld:

L,2 = 8 m

q,2 = 20 kN/m

I,2 = 23100 cm^4 (IPE 400, Stahl)



Das vierte System entsteht aus Überlagerung des 0- und 1-Zustandes.
Es ist identisch mit dem ersten System.

2. Schritt

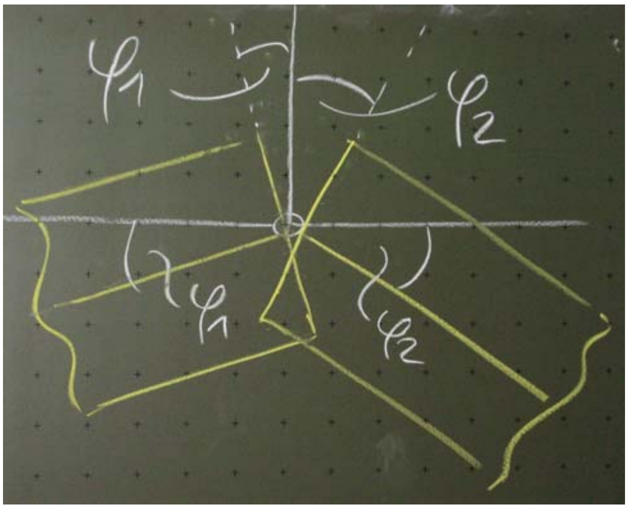
Durch Freischneiden wird eine (beliebige) Schnittgröße zu Null gesetzt. Es entsteht ein statisch bestimmtes Grundsystem („Null-Zustand)“. Die freigeschnittene Größe nennt man „die statisch unbestimmte (Größe)“.

Häufig wird ein Biegemoment gewählt. Wir wählen das Stützmoment des Balkens am Zwischenauflager. Wird dieses zu Null gesetzt, entsteht aus dem gegebenen Zweifeldträger zwei Einfeldträger mit gemeinsamem Zwischenauflager.

Diese sind statisch bestimmt. Wir können dafür alle Schnitt- und Verformungsgrößen (Biegelinie) bestimmen.

3. Schritt

An der Stelle der freigeschnittenen Kraftgröße, der statisch Unbestimmten, entstehen Verformungen, in unserem Fall ein Knick in der Biegelinie.



Knick der Biegelinie, Klaffen der Schnittufer

Die Neigung des linken Schnittufers gegen die Horizontale beträgt

$w',1 \;=\; \varphi,1 \;=\; -q,1 * (L,1)^3 \,/\, (24 * E * I,1)$

Die Neigung des rechten Schnittufers gegen die Horizontale beträgt

$w',2 \;=\; \varphi,2 \;=\; q,2 * (L,2)^3 \,/\, (24 * E * I,2)$

Der entstandene Knick zwischen den beiden Schnittufern beträgt

$\varphi,knick \;=\; \varphi,2 \;-\; \varphi,1$

4. Schritt

Statt der freigeschnittenen Größe wird als „statisch Unbestimmte“ an beiden Schnittufern ein Biegemoment aufgebracht in der zunächst unbekannten Größe X („1-Zustand“).

Infolge dieses Biegemomentes X beträgt die Neigung des linken Schnittufers gegen die Horizontale:

$w'_{,1} = \varphi_{,1} = -X * L_{,1} / (3 * E * I_{,1})$

Ebenso gilt für das rechte Schnittufer:

$w'_{,2} = \varphi_{,2} = X * L_{,2} / (3 * E * I_{,2})$

Der entstandene Knick zwischen den beiden Schnittufern beträgt

$\varphi_{,knick} = \varphi_{,2} - \varphi_{,1}$

5. Schritt

Wird die statisch Unbestimmte in der richtigen Größe gewählt, dann wird der im Grundzustand zwischen den beiden Schnittufern entstandene Knick gerade wieder aufgehoben. Die statisch Unbestimmte kann also aus der Bedingung ermittelt werden, dass

$\varphi_{,knick,0\text{-}Zustand} + \varphi_{,knick,1\text{-}Zustand} = 0$

sein soll. Das entspricht dem Formulieren einer Verträglichkeitsbedingung.

Durch Einsetzen erhält man:

$\varphi_{,2,Null} - \varphi_{,1,Null} + \varphi_{,2,Eins} - \varphi_{,1,Eins} = 0$

$$q_{,2} * (L_{,2})^3 / (24 * E * I_{,2}) \quad -[-q_{,1} * (L_{,1})^3 / (24 * E * I_{,1})]$$
$$+ X * L_{,2} / (3 * E * I_{,2}) \quad -[-X * L_{,1} / (3 * E * I_{,1})] \quad = 0$$

Durchmultiplizieren mit 24*E und zusammenfassen:

$q_{,2} * (L_{,2})^3 / I_{,2} + q_{,1} * (L_{,1})^3 / I_{,1} + X * [8 * L_{,2} / I_{,2} + 8 * L_{,1} / I_{,1}] = 0$

$X = -[q_{,2} * (L_{,2})^3 / I_{,2} + q_{,1} * (L_{,1})^3 / I_{,1}] / [8 * L_{,2} / I_{,2} + 8 * L_{,1} / I_{,1}]$

6. Schritt

Überlagern der Schnittgrößenverläufe, Verformungsverläufe, Auflagerkräfte.

4.2 Verallgemeinerte Darstellung des Verfahrens

Schlagwort: Prinzip der virtuellen Kräfte

1. Schritt

System und Belastung zusammenstellen

2. Schritt

Statisch Unbestimmte X festlegen, Schnittgrößen des 0-Zustandes bestimmen.

3. Schritt

Die zur statisch Unbestimmten gehörige Formänderungsgröße bestimmen.
Diese wird allgemein als $\delta_{1,0}$ bezeichnet.

Der erste Index bezeichnet die 1. statische Unbestimmte, der zweite Index bezeichnet den 0-Zustand.

Entsprechungen zwischen den statisch Unbestimmten und den zugehörigen formänderungsgrößen:

Biegemoment	Knickwinkel in der Biegelinie
Querkraft	Durchbiegungssprung in der Biegelinie
Normalkraft	Längenänderungssprung

4. Schritt

Als statisch Unbestimmte wird jetzt ein virtuelles Einheitsmoment aufgebracht („1-Zustand“). Aus verfahrenstechnischen Gründen ist es einheitenfrei.

Infolge dieses virtuellen Biegemomentes 1 (überstrichen) beträgt die Neigung des linken Schnittufers gegen die Horizontale:

$w'_1 = \varphi_1 = -1 * L_1 / (3 * E * I_1)$

Ebenso gilt für das rechte Schnittufer:

$w'_2 = \varphi_2 = 1 * L_2 / (3 * E * I_2)$

Der entstandene Knick zwischen den beiden Schnittufern wird entsprechend der in Schritt 3 eingeführten Konvention als

$\delta_{1,1} = \varphi_2 - \varphi_1$

bezeichnet.

Der erste Index bezeichnet die 1. statische Unbestimmte, der zweite Index bezeichnet den 1-Zustand.

5. Schritt

Die Verträglichkeitsbedingung lautet jetzt

$\delta_{1,0} + X \cdot \delta_{1,1} = 0$

mit

$X = -\delta_{1,0} / \delta_{1,1}$

Diese Formel gilt allgemein für alle möglichen statisch Unbestimmten.

Wie bereits oben durchgeführt erhält man durch Einsetzen:

Zähler:

$Z = q_{,2} \cdot (L_{,2})^3 / (24 \cdot E \cdot I_{,2}) + q_{,1} \cdot (L_{,1})^3 / (24 \cdot E \cdot I_{,1})$

Nenner:

$N = L_{,2} / (3 \cdot E \cdot I_{,2}) + L_{,1} / (3 \cdot E \cdot I_{,1})$

6. Schritt

Überlagern der Schnittgrößenverläufe, Verformungsverläufe, Auflagerkräfte.

4.3 Bezug auf den Arbeitssatz

5. Blockieren

Schlagwort: Prinzip der virtuellen Verschiebungen

... wird noch erarbeitet ...

6. Beispiele

6.1 Unsymmetrischer Zweifeldträger

Linkes Feld: $L_{,1} = 6$ m

Rechtes Feld: $L_{,2} = 8$ m

$q_{,1} = q_{,2} = 20$ kN/m

$I_{,1} = I_{,2} = 23100$ cm^4 (IPE 400, Stahl)

Statisch Unbestimmte X: Stützmoment

0-Zustand:

Neigung der Schnittufer

φ,links = –q * $(L,1)^3$ / (24 * E * I,1)

φ,links = –20 kN/m * $(6\ m)^3$ / (24 * 2,1*10^8 kN/m^2 * 23100 cm^4) = –0,00371

φ,rechts = +q * $(L,2)^3$ / (24 * E * I,2)

φ,rechts = +20 kN/m * $(8\ m)^3$ / (24 * 2,1*10^8 kN/m^2 * 23100 cm^4) = 0,00880

Klaffung der Schnittufer

φ,gesamt = φ,rechts – φ,links

φ,gesamt = 0,00880 –(–0,00371) = +0,0125

Wenn die beiden Schnittufer in der neutralen Faser gelenkig gekoppelt sind, entsteht am oberen Flansch ein Spalt von

ΔL = 0,0125 * (400 mm / 2) = 2,5 mm

Statisch Unbestimmte:

Für q,1 = q,2 und I,1 = I,2 vereinfachen sich die oben angegebenen Terme für Zähler und Nenner:

Mit 24 * I durchmultiplizieren, q/8 ausklammern:

X = – q/8 * [$(L,2)^3$ + $(L,1)^3$] / [L,2 + L,1]

(da der Term unabhängig von I ist, gilt dies für alle Querschnittsformen)

X – 20 kN/m / 8 * [$(8\ m)^3$ + $(6\ m)^3$] / (8 m + 6 m) = –130 kNm

Überlagerung der Biegelinien:

Neigung der Tangente am Zwischenauflager:

Aus dem 0-Zustand:

φ,links = –0,00371

Aus dem 1-Zustand:

φ,links = –M,max * L,1 / (3 * E * I,1)

φ,links = –(–130 kNm) * 6 m / (3 * 2,1*10^8 kN/m^2 * 23100 cm^4) = +0,00536

Winkel aus dem 0- und dem 1-Zustand überlagert:

φ,links,überlagert = –0,00371 + 0,00536 = +0,00165

Kontrolle am rechten Stababschnitt:

Aus dem 0-Zustand:

φ,rechts = +0,00880

Aus dem 1-Zustand:

φ,rechts = +M,max * L,2 / (3 * E * I,2)

φ,rechts = –130 kNm * 8 m / (3 * 2,1*10^8 kN/m^2 * 23100 cm^4) = –0,00715

Winkel aus dem 0- und dem 1-Zustand überlagert:

φ,links,überlagert = +0,00880 – 0,00715 = +0,00165

Überlagerung der Momentenlinie:

Linke Trägerseite

Aus dem 0-Zustand:

Parabelförmige Momentenlinie mit dem Maximalwert

M(ξ=0,5) = q * $(L,1)^2$ / 8

M(ξ=0,5) = 20 kN/m * $(6\ m)^2$ / 8 = 90 kNm

Aus dem 1-Zustand:

Dreieckförmige Momentenlinie mit dem Maximalwert X = –130 kNm

M(ξ=0,5) = –130 kNm / 2 = –65 kNm

M,gesamt(ξ=0,5) = +90 kNm – 65 kNm = +25 kNm

Überlagerung der Querkraftlinie:

Aus dem 0-Zustand:

Symmetrische Querkräfte mit je

V(ξ=0=1) = q * L,1 / 2

V(ξ=0=1) = ±20 kN/m * 6 m / 2 = ±60 kNm

Aus dem 1-Zustand:

V(ξ=0) = M,max / L

V(ξ=0) = –130 kNm / 6 m = –21,7 kN

V(ξ=1) = +M,max / L

V(ξ=1) = +(–130 kNm) / 6 m = –21,7 kN

Überlagerung:

V(ξ=0) = +60 kN – 21,7 kN = +38,3 kN

V(ξ=1) = –60 kN – 21,7 kN = –81,7 kN

HS Augsburg – Studiengang Bauingenieur
Baumgartner Str. 16, D-86161 Augsburg
Tel. +49(0) 821 – 5586 – 3171, Fax – 3913
peter.knoedel@hs-augsburg.de
Bearbeiter: Prof. Dr. P. Knödel

6.2 Zweigelenkrahmen

Höhe: H = 6 m

Spannweite : L = 10 m

I = 23100 cm^4 (IPE 400, Stahl)

Linke Stütze: Winddruck 4 kN/m

Rechte Stütze: Windsog 3 kN/m

Riegel: Schnee 5 kN/m

Statisch Unbestimmte: X,1 ... Linkes Eckmoment
X,2 ... Rechtes Eckmoment

Hinweis: der Rahmen ist nur einfach statisch unbestimmt; aus Übungsgründen wird das Beispiel benutzt, im die Behandlung zweier statisch Unbestimmter zu üben.

0-Zustand:

(gezogene Faser innen ist positiv)

Stütze links:

Feldmoment

$M = q * L^2 / 8 = 4 \text{ kN/m} * (6 \text{ m})^2 / 8 = 18{,}0 \text{ kNm}$

Tangentenneigung an der Rahmenecke

$\varphi = -q * L^3 / (24{*}E{*}I) = -4 \text{ kN/m} * (6 \text{ m})^3 / (24 * 2{,}1{*}10^8 \text{ kN/m}^2 * 23100 \text{ cm}^4)$

$\varphi = -864 \text{ kNm}^2 / 1164240 \text{ kNm}^2 = -0{,}000742$

Stütze rechts:

Feldmoment

$M = q * L^2 / 8 = -3 \text{ kN/m} * (6 \text{ m})^2 / 8 = -13{,}5 \text{ kNm}$

Tangentenneigung an der Rahmenecke

$\varphi = +q * L^3 / (24{*}E{*}I) = +(-3 \text{ kN/m}) * (6 \text{ m})^3 / (24 * 2{,}1{*}10^8 \text{ kN/m}^2 * 23100 \text{ cm}^4)$

$\varphi = -648 \text{ kNm}^2 / 1164240 \text{ kNm}^2 = -0{,}000557$

Riegel:

Feldmoment

$M = q * L^2 / 8 = 5 \text{ kN/m} * (10 \text{ m})^2 / 8 = 62{,}5 \text{ kNm}$

Tangentenneigung an der linken Rahmenecke

$\varphi = +q * L^3 / (24*E*I) = +5 \text{ kN/m} * (10 \text{ m})^3 / (24 * 2{,}1*10^8 \text{ kN/m}^2 * 23100 \text{ cm}^4)$

$\varphi = +5000 \text{ kNm}^2 / 1164240 \text{ kNm}^2 = +0{,}00429$

Tangentenneigung an der rechten Rahmenecke

$\varphi = -0{,}00429$

<u>1-Zustand:</u>

(gezogene Faser innen ist positiv)

Stütze links:

Eckmoment

$M = +1$

Tangentenneigung an der Rahmenecke

$\varphi = -M * L / (3*E*I) = -1 * 6 \text{ m} / (3 * 2{,}1*10^8 \text{ kN/m}^2 * 23100 \text{ cm}^4)$

$\varphi = -6 \text{ m} / 145530 \text{ kNm}^2 = -0{,}0000412 \text{ / kNm}$

Riegel:

Eckmoment

$M = +1$

Tangentenneigung an der linken Rahmenecke

$\varphi = +M * L / (3*E*I) = +1 * 10 \text{ m} / (3 * 2{,}1*10^8 \text{ kN/m}^2 * 23100 \text{ cm}^4)$

$\varphi = +10 \text{ m} / 145530 \text{ kNm}^2 = +0{,}0000687 \text{ / kNm}$

<u>2-Zustand:</u>

(gezogene Faser innen ist positiv)

Riegel:

Eckmoment

$M = +1$

Tangentenneigung an der rechten Rahmenecke

$\varphi = -M * L / (3*E*I) = -1 * 10 \text{ m} / (3 * 2{,}1*10^8 \text{ kN/m}^2 * 23100 \text{ cm}^4)$

$\varphi = -10 \text{ m} / 145530 \text{ kNm}^2 = -0{,}0000687 \text{ / kNm}$

Stütze rechts:

Eckmoment

$M = +1$

Tangentenneigung an der Rahmenecke

φ = +M * L / (3*E*I) = +1 * 6 m / (3 * 2,1*10^8 kN/m^2 * 23100 cm^4)

φ = +6 m / 145530 kNm^2 = +0,0000412 / kNm

Verträglichkeitsbedingung:

δ,1,0 = φ,riegel – φ,stiel = +0,00429 – (–0,000742) = 0,00503

δ,1,1 = φ,riegel – φ,stiel = +0,0000687 / kNm – (–0,0000412 / kNm) = 0,000110 / kNm

δ,1,2 = 0,5 * φ,riegel = +0,0000343 / kNm

δ,2,0 = φ,stiel – φ,riegel = –0,000557 – (–0,00429) = +0,00373

δ,2,1 = – 0,5 * φ,riegel = –0,5 * (–0,0000412 / kNm) = +0,0000343 / kNm

δ,2,2 = φ,stiel – φ,riegel = +0,0000412 / kNm – (–0,0000687 / kNm) = 0,000110 / kNm

δ,1,0 + X,1 * δ,1,1 + X,2 * δ,1,2 = 0

δ,2,0 + X,1 * δ,2,1 + X,2 * δ,2,2 = 0

Aus der zweiten Gleichung nach X,1 aufgelöst:

X,1 = (– δ,2,0 – X,2 * δ,2,2) / δ,2,1 ... und in die 1. Gleichung eingesetzt

δ,1,0 + δ,1,1 * (– δ,2,0 – X,2 * δ,2,2) / δ,2,1 + X,2 * δ,1,2 = 0

δ,1,0 – δ,1,1 * δ,2,0 / δ,2,1 – X,2 * δ,1,1 * δ,2,2 / δ,2,1 + X,2 * δ,2,1 = 0

– X,2 * δ,1,1 * δ,2,2 / δ,2,1 + X,2 * δ,2,1 = – δ,1,0 + δ,1,1 * δ,2,0 / δ,2,1

X,2 (–δ,1,1 * δ,2,2 / δ,2,1 + δ,2,1) = – δ,1,0 + δ,1,1 * δ,2,0 / δ,2,1

Multipliziert mit δ,2,1:

X,2 (–δ,1,1 * δ,2,2 + δ,2,1 * δ,2,1) = – δ,1,0 * δ,2,1 + δ,1,1 * δ,2,0

X,2 = (–δ,1,0 * δ,2,1 + δ,1,1 * δ,2,0) / (–δ,1,1 * δ,2,2 + δ,2,1 * δ,2,1)

(Achtung: Zähler stimmt mit Hirschfeld-Lösung überein, Nenner ist VZ-vertauscht)

Aufgelöst mit Determinanten (Hirschfeld 1998):

Nenner:

NEN = δ,1,1 * δ,2,2 – δ,1,2 * δ,1,2

X,1 = (–δ,1,0 * δ,1,1 + δ,2,0 * δ,1,2) / NEN

X,2 = (–δ,2,0 * δ,1,1 + δ,1,0 * δ,2,1) / NEN

Zahlenwerte eingesetzt:

NEN = +0,000110 / kNm * 0,000110 / kNm – (0,0000343 / kNm)^2

NEN = +1,092*10^{-8} / (kNm)^2

X,1 = (–0,00503 * 0,000110 / kNm + 0,00373 * 0,0000343 / kNm) / NEN

X,1 = –38,9 kNm

X,2 = (–0,00373 * 0,000110 / kNm + 0,00503 * 0,0000343 / kNm) / NEN

X,2 = –21,8 kNm

7. Literatur

[1] Hirschfeld, K.: Baustatik. Theorie und Beispiele. Vierte, unveränderte Auflage, Erster und Zweiter Teil. Springer, Berlin 1998.

[2] Knödel, P.: Lehrunterlagen Stahlbau an der Fachhochschule Augsburg, herunterladbar über http://www.peterknoedel.de/lehre/lehre.htm, laufend aktualisiert.