UNIVERSITÄT LEIPZIG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Quantenmechanik I

Übungsblatt 7

Solutions

1. **Skalenoperator in zwei Dimensionen**
   Unter Anwendung der Definitionen von p_x und p_y ergibt sich

$$J = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{1}$$

$$G = r\frac{\partial}{\partial r}. \tag{2}$$

   Die partielle Ableitungen bezüglich r und φ kommutieren, und damit kommutieren auch J und G. Wegen der letzten Gleichung folgt auch leicht, dass

$$Gr^n = n\,r^n.$$

2. **Dreidimensionale Darstellung der Drehimpulsalgebra**
   Die algebraische Relationen

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c$$

   ergeben sich durch eine einfache Matrixmultiplikation. Die Matrix J_z hat offensichtlich drei verschiedene Eigenwerte: $\lambda = 0, 1, -1$. Die ensprechenden Eigenvektoren sind:

$$w_0 = [0, 0, 1]$$
$$w_+ = [1, -i, 0]/\sqrt{2}$$
$$w_- = [1, i, 0]/\sqrt{2},$$

   wobei die Vektoren jetzt als Elemente des (komplexen) Hilbertraums $\mathbb{C}^3$ verstanden werden sollen. Das Skalarprodukt in diesem Raum nimmt die Form:

$$(\vec{u}, \vec{w}) = \overline{u_x}w_x + \overline{u_y}w_y + \overline{u_z}w_z,$$

an. Der Raum $\mathbb{C}^3$ kann mit dem von den Kugelflächenfunktionen zu $\ell = 1$ aufgespannten Raum identifiziert werden. Die Matrix J_z stellt den Generator der Drehung um die z Achse in diesem Raum dar. Der Vektor w_0 muss damit Drehinvariant sein, und deshalb entspricht er Y_0^1. Bei einer (endlichen) Drehung transformieren sich $w_\pm$ wie folgt:

$$e^{i\alpha J_3} w_\pm = e^{\pm i\alpha} w_\pm.$$

Sie entsprechen deshalb den Kugelflächenfunktionen $Y_{\pm 1}^1$.

3. **Kugelflächenfunktionen zu $\ell = 1$**
Betrachten wir die Funktion ψ als eine Funktion von θ und φ, und die Gleichungen $L_-\psi = 0$, $L_3\psi = -\hbar\psi$ als partielle Differentialgleichungen. Aus der zweiten Gleichung folgt sofort

$$\psi = f(\theta)\, e^{-i\varphi},$$

und damit wird die erste Gleichung eine gewönliche Differentialgleichung für $f(\theta)$:

$$\frac{df}{d\theta} - \cot\theta\, f = 0,$$

mit der Lösung

$$f = N \cdot \sin(\theta),$$

wobei N eine Normierungskonstante ist. Die Funktion Y_{-1}^1 ist also proportional zu $\psi = \sin\theta e^{-i\varphi}$.