

MATHEMATIK

11.07.2019

AUFGABEN

1. Ein Kapital von 42.125,28 € wurden am 09.08.2000 zu einem Zinssatz von 4% auf einem Sparbuch angelegt.
 - a) Welches Endkapital ist heute (17.07.2013) mittels Variante „gestern“ unter Verwendung der deutschen Methode vorhanden?
 - b) Welcher Betrag müsste am 01.11.2013 eingezahlt werden, um am 01.01.2020 über ein Kapital von 143.690,83 € verfügen zu können?

2. Ein Kapital von 12.000 Euro wurde am 31.08.2000 auf ein Konto eingezahlt und mit einem Zinssatz von 6% verzinst.
 - a) Welches Endkapital ist heute (13.07.2011) mittels Variante „morgen“ unter Verwendung der Deutschen Methode vorhanden?

Aufgaben:

1) Ausgangskapital:

Ein abgezinster Sparbrief wird bei einem Zinssatz von 4,5% nach 7 Jahren zu 1000 Euro zurückgezahlt.

Wie lautet der rechnerische Verkaufspreis?

2) Zinssatz:

Welcher Zinssatz muss geboten werden, damit sich ein Kapital

a) in 10 Jahren verdoppelt?

b) in 7 Jahren um die Hälfte zunimmt?

3) Laufzeit 1:

Ein Kapital von 20000 Euro erbringt bei 6% jährlicher Verzinsung am Ende der Laufzeit 10072,60 Euro Zinsen.

Wie lange war es zinseszinslich angelegt?

4) Laufzeit 2:

Wie lange dauert es bis sich ein bei 5% angelegter Kapitalbetrag verdreifacht bzw. allgemein ver-n-facht?

Abschreibungen:

Gemäß Definition handelt es sich bei Abschreibungen um die Erfassung der Wertminderung eines Wirtschaftsgutes in der Nutzungsdauer.
(AfA = Absetzung für Abnutzung).

Die Methoden, nach denen die Abschreibungsbeträge auf die Perioden der Nutzungsdauer verteilt werden, sind die lineare Abschreibung mit gleichen Abschreibungsbeträgen und die degressive Abschreibung mit fallenden Beträgen.

Lineare Abschreibung:

§ 7 (1) EStG: Lineare Abschreibung

... ist jeweils für ein Jahr der Teil der Anschaffungskosten abzusetzen, der bei gleichmäßiger Verteilung dieser Kosten auf die Gesamtdauer der Verwendung oder Nutzung auf ein Jahr entfällt.

(Absetzung für Abnutzung in gleichen Jahresbeträgen).

Der **Restwert** ergibt sich in einer beliebigen Abschreibungsperiode m während der Laufzeit und des Abschreibungsbetrages A_m :

$$K_m = K_0 - m \cdot A_m$$

Für den **Abschreibungsbetrag** gilt bei vorgegebenem Endwert:

$$A_m = \frac{K_0 - K_n}{n}$$

Zusätzlich ergeben sich daraus folgende Prozentsätze:

Abschreibungsprozentsatz(Restwert): $p_m = \frac{A_m}{K_{m-1}} \cdot 100$

Abschreibungsprozentsatz(Neuwert): $p_0 = \frac{A_m}{K_0} \cdot 100$

Abschreibungsprozentsatz: $p = \frac{A_m}{K_0} \cdot 100$

Beispiel lineare Abschreibung:

Eine Maschine mit Anschaffungskosten von 100.000 Euro soll in 20 Jahren linear auf einen Restwert von 5.000 Euro abgeschrieben werden.

- a) Wie lauten die jährlichen Abschreibungen?
- b) Erstellen Sie eine Abschreibungsplan für diese 20 Jahre.

$$A_{20} = \frac{K_0 - K_{20}}{20} = \frac{100000 - 5000}{20} = 4750$$

$$p_0 = \frac{A_{20}}{K_0} \cdot 100 = \frac{4750}{100000} \cdot 100 = 4,75\%$$

Abschreibungsplan:

m	Km	Am	pm	p
0	100.000,00 €			
1	95.250,00 €	4.750,00 €	4,75%	4,75%
2	90.500,00 €	4.750,00 €	4,99%	4,75%
3	85.750,00 €	4.750,00 €	5,25%	4,75%
4	81.000,00 €	4.750,00 €	5,54%	4,75%
5	76.250,00 €	4.750,00 €	5,86%	4,75%
6	71.500,00 €	4.750,00 €	6,23%	4,75%
7	66.750,00 €	4.750,00 €	6,64%	4,75%
8	62.000,00 €	4.750,00 €	7,12%	4,75%
9	57.250,00 €	4.750,00 €	7,66%	4,75%
10	52.500,00 €	4.750,00 €	8,30%	4,75%
11	47.750,00 €	4.750,00 €	9,05%	4,75%
12	43.000,00 €	4.750,00 €	9,95%	4,75%
13	38.250,00 €	4.750,00 €	11,05%	4,75%
14	33.500,00 €	4.750,00 €	12,42%	4,75%
15	28.750,00 €	4.750,00 €	14,18%	4,75%
16	24.000,00 €	4.750,00 €	16,52%	4,75%
17	19.250,00 €	4.750,00 €	19,79%	4,75%
18	14.500,00 €	4.750,00 €	24,68%	4,75%
19	9.750,00 €	4.750,00 €	32,76%	4,75%
20	5.000,00 €	4.750,00 €	48,72%	4,75%

Aufgabe lineare Abschreibung:

- 1) Ein LKW mit einem Anschaffungspreis von 96.000 Euro soll in 5 Jahren bis auf einen Restwert von 6.000 Euro linear abgeschrieben werden.
 - a) Wie groß ist der jährliche Abschreibungsbetrag?
 - b) Wie groß ist der Abschreibungsprozentsatz (Neuwert)?
 - c) Erstellen Sie den Abschreibungsplan für die 5 Jahre.

- 2) Eine chemische Großanlage im Wert von 13 Millionen Euro soll innerhalb von 32 Jahren auf den Schrottwert von 1 Mio Euro abgeschrieben werden.
 - a) Wie groß ist der jährliche Abschreibungsbetrag?
 - b) Wie groß ist der Buchwert am Ende des 27. Jahres?

Lösung:

$$\text{Zu 1)} \quad A_5 = \frac{K_0 - K_5}{5} = \frac{96000 - 6000}{5} = 18000$$

$$p_0 = \frac{A_5}{K_0} \cdot 100 = \frac{18000}{96000} \cdot 100 = 18,75\%$$

Abschreibungsplan:

m	K_m	A_m	p_m	p
0	96.000,00 €			
1	78.000,00 €	18.000,00 €	18,75%	18,75%
2	60.000,00 €	18.000,00 €	23,08%	18,75%
3	42.000,00 €	18.000,00 €	30,00%	18,75%
4	24.000,00 €	18.000,00 €	42,86%	18,75%
5	6.000,00 €	18.000,00 €	75,00%	18,75%

$$\text{Zu 2)} \quad A_{32} = \frac{K_0 - K_{32}}{32} = \frac{13 \text{ MIO} - 1 \text{ MIO}}{32} = 375.000$$

$$R_{27} = 13 \text{ MIO} - 27 \cdot 375.000 = 2,875 \text{ MIO}$$

Degressive Abschreibung:

§ 7 (2) EStG: Geometrisch degressive Abschreibung

...kann der Steuerpflichtige... die Absetzung in fallenden Jahresbeträgen bemessen.

Die Absetzung für Abnutzung in fallenden Jahresbeträgen kann nach einem unveränderlichen Hundertsatz vom jeweiligen Buchwert (Restwert) vorgenommen werden.

Dadurch dass ein fester Prozentsatz erzwungen wird, kann der **Restwert** mittels der Zinseszinsformel und dem verminderten Prozentwert $(1-i)$ errechnet werden.

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^m = K_{m-1} \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

bzw.

$$K_m = K_0 \cdot (1 - i)^m = K_{m-1} \cdot (1 - i)$$

Die unterschiedlichen **Abschreibungsbeträge** lassen sich für jede Periode direkt aus dem Abschreibungsprozentsatz und der Abschreibungsbasis berechnen.

$$A_m = K_{m-1} - K_m = K_{m-1} \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{m-1} \cdot \frac{p}{100}$$

Durch den verminderten Prozentwert $(1 - i) < 0$ handelt es sich um eine geometrische Reihe bzw. eine Nullfolge.

Da somit der Restwert niemals Null ergeben wird, empfiehlt es sich ab einem definierten Buchwert zur linearen Abschreibung zu wechseln.

Bei einem vorgegebenen Restwert , einem Anschaffungswert und einer Laufzeit n (Perioden), kann der **Abschreibungsprozentsatz** mittels Umstellung der Restwertmethode berechnet werden.

$$p = \left(1 - \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \right) \cdot 100$$

Um die **Anzahl der Abschreibungsperioden** bestimmen zu können, wird die Restwertformel nach aufgelöst.

Das resultierende Ergebnis wird immer aufgerundet.

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100} \right)^n \quad | \cdot \frac{1}{K_0}$$

$$\frac{K_n}{K_0} = \left(1 - \frac{p}{100} \right)^n \quad | \cdot \log$$

$$n = \log_{\left(1 - \frac{p}{100}\right)} \left(\frac{K_n}{K_0} \right) = \frac{\log(K_n) - \log(K_0)}{\log\left(1 - \frac{p}{100}\right)}$$

Abschwächung der Degression:

Um den starken Schwankungen der degressiven Abschreibung entgegen zu wirken (sehr hohe Abschreibungen zu Beginn und geringe zum Ende des Lebenszyklus einer Maschine), werden sowohl dem Anschaffungswert als auch dem Restwert ein definierter, nicht abzuschreibender Betrag hinzugefügt.

$$\sum_{m=1}^n A_m = (K_0 + d) - (K_n + d) = K_0 - K_n$$

Beispiel: geometrisch degressive Schwächung

(siehe Seite 56):

$$K_0 = 100.000 \text{ Euro}$$
$$K_n = 5.000 \text{ Euro}$$
$$n = 20 \text{ Jahre}$$

Somit ergibt sich für den Abschreibungsprozentsatz:

$$p = \left(1 - \sqrt[20]{\frac{5.000}{100.000}} \right) \cdot 100 \approx 13,91\%$$

Abschreibungsplan:

m	Km	Am	pm	p
0	100.000,00 €			
1	86.090,00 €	13.910,00 €	13,91%	13,91%
2	74.114,88 €	11.975,12 €	13,91%	11,98%
3	63.805,50 €	10.309,38 €	13,91%	10,31%
4	54.930,16 €	8.875,35 €	13,91%	8,88%
5	47.289,37 €	7.640,78 €	13,91%	7,64%
6	40.711,42 €	6.577,95 €	13,91%	6,58%
7	35.048,46 €	5.662,96 €	13,91%	5,66%
8	30.173,22 €	4.875,24 €	13,91%	4,88%
9	25.976,13 €	4.197,09 €	13,91%	4,20%
10	22.362,85 €	3.613,28 €	13,91%	3,61%
11	19.252,17 €	3.110,67 €	13,91%	3,11%
12	16.574,20 €	2.677,98 €	13,91%	2,68%
13	14.268,73 €	2.305,47 €	13,91%	2,31%
14	12.283,95 €	1.984,78 €	13,91%	1,98%
15	10.575,25 €	1.708,70 €	13,91%	1,71%
16	9.104,23 €	1.471,02 €	13,91%	1,47%
17	7.837,83 €	1.266,40 €	13,91%	1,27%
18	6.747,59 €	1.090,24 €	13,91%	1,09%
19	5.809,00 €	938,59 €	13,91%	0,94%
20	5.000,97 €	808,03 €	13,91%	0,81%

Aufgaben degressive Abschreibung:

1. In spätestens wie vielen Jahren ist eine Fabrikeinrichtung mit einem Anschaffungswert von 600.000 Euro bei geometrisch degressiver Abschreibung und einem Satz von 15% auf einen Restwert von 40.000 Euro abgeschrieben.

a) Erstellen Sie einen Abschreibungsplan für die ersten 5 Jahre.

2. Ein mobiler Kran habe eine Nutzungsdauer von 6 Jahren. Seine Anschaffungskosten betragen 460.000 Euro.

In den ersten 2 Jahren soll die Maschine mit einem Satz von 20% und in den folgenden Jahren linear auf einen Restwert von 4000 Euro nach der gesamten Laufzeit abgeschrieben werden.

a) Erstellen Sie den Abschreibungsplan.

Aufgaben degressive Abschreibung (mit Schwächung):

3. Die Einrichtung einer Tankstelle kostete 320.000 Euro. Sie soll in 10 Jahren geometrisch degressiv bis auf 20.000 Euro abgeschrieben sein. Zur Abschwächung der Degression wird ein nicht abzuschreibender Wert von 120.000 Euro berücksichtigt werden.
- a) Wie hoch ist der Abschreibungssatz?
 - b) Wie hoch ist der Restwert nach 5 Jahren?
 - c) Erstellen Sie den Abschreibungsplan
 - d) Bestimmen die den Abschreibungssatz als auch Restwert ohne Berücksichtigung der Degressionsschwächung.

Lösungen zu degressiven Abschreibungen I:

$$\text{zu 1) } n = \frac{\log(40.000) - \log(600.000)}{\log(1-15\%)} = \frac{4,602 - 5,778}{\log(0,85)} = 16,663 \approx 17 \text{ Jahre}$$

Abschreibungsplan:

m	K_m	A_m	p_m	p
0	600.000,00 €			
1	510.000,00 €	90.000,00 €	15,00%	15,00%
2	433.500,00 €	76.500,00 €	15,00%	12,75%
3	368.475,00 €	65.025,00 €	15,00%	10,84%
4	313.203,75 €	55.271,25 €	15,00%	9,21%
5	266.223,19 €	46.980,56 €	15,00%	7,83%

Lösungen zu degressiven Abschreibungen II:

zu 2) Abschreibungsplan:

m	K_m	A_m	p_m	p
0	460.000,00 €			
1	368.000,00 €	92.000,00 €	20,00%	20,00%
2	294.400,00 €	73.600,00 €	20,00%	16,00%
3	221.800,00 €	72.600,00 €	24,66%	15,78%
4	149.200,00 €	72.600,00 €	32,73%	15,78%
5	76.600,00 €	72.600,00 €	48,66%	15,78%
6	4.000,00 €	72.600,00 €	94,78%	15,78%

Lösungen zu degressiven Abschreibungen III:

Degressive Abschreibung mit „nicht abzuschreibendem Betrag“

$$\text{zu 3a) } p = \left(1 - \sqrt[n]{\frac{K_n + d}{K_0 + d}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \sqrt[10]{\frac{140.000}{440.000}}\right) \cdot 100 = 10,82\%$$

$$\text{zu 3b) } K_n = (K_0 + d) \cdot (1 - i)^n = 440.000 \cdot 0,8918^5 = 248.193,28$$

Abschreibungsplan:

m	K_m	A_m	p_m	p
0	440.000,00 €			
1	392.392,00 €	47.608,00 €	10,82%	10,82%
2	349.935,19 €	42.456,81 €	10,82%	9,65%
3	312.072,20 €	37.862,99 €	10,82%	8,61%
4	278.305,99 €	33.766,21 €	10,82%	7,67%
5	248.193,28 €	30.112,71 €	10,82%	6,84%
6	221.338,77 €	26.854,51 €	10,82%	6,10%
7	197.389,91 €	23.948,85 €	10,82%	5,44%
8	176.032,32 €	21.357,59 €	10,82%	4,85%
9	156.985,63 €	19.046,70 €	10,82%	4,33%
10	139.999,78 €	16.985,84 €	10,82%	3,86%

Lösungen zu degressiven Abschreibungen IV:

Degressive Abschreibung ohne „nicht abzuschreibendem Betrag“

$$\text{zu 3c) } p = \left(1 - \sqrt[n]{\frac{K_n + d}{K_0 + d}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \sqrt[10]{\frac{20.000}{320.000}}\right) \cdot 100 = 24,21\%$$

$$K_n = (K_0 + d) \cdot (1 - i)^n = 320.000 \cdot 0,7579^5 = 80.022,02$$

Abschreibungsplan:

m	K_m	A_m	p_m	P
0	320.000,00 €			
1	242.528,00 €	77.472,00 €	24,21%	24,21%
2	183.811,97 €	58.716,03 €	24,21%	18,35%
3	139.311,09 €	44.500,88 €	24,21%	13,91%
4	105.583,88 €	33.727,22 €	24,21%	10,54%
5	80.022,02 €	25.561,86 €	24,21%	7,99%
6	60.648,69 €	19.373,33 €	24,21%	6,05%
7	45.965,64 €	14.683,05 €	24,21%	4,59%
8	34.837,36 €	11.128,28 €	24,21%	3,48%
9	26.403,24 €	8.434,12 €	24,21%	2,64%
10	20.011,01 €	6.392,22 €	24,21%	2,00%