28. April 2014

`FILE: D:\coursfei\SS14\ELA14A.tex/pdf Material zur Vorlesung HGFei`

1 Invertierbare Matrizen

1.1 Material für Übungen

Gegeben zwei Vektoren im $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Wieviele invertierbare Matrizen $\boldsymbol{A}$ (Format 3×3) gibt es dann, die $\mathbf{x}$ auf $\mathbf{y}$ abbilden, die also $\boldsymbol{A} * \mathbf{x} = \mathbf{y}$ erfüllen? Kann man dies sogar für mehrere Paare von Vektoren fordern, also $\boldsymbol{A} * \mathbf{x}_j = \mathbf{y}_j, 1 \leq j \leq s \in \mathbb{N}$? Analoge Frage für $n \times n$-Matrizen.

Exercise:
Unter welchen Bedingungen ist es möglich, zu vorgegebenen Vektoren $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ in $\mathbb{R}^n$ und vorgegebenen Zielvektoren $\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_n$ in $\mathbb{R}^m$ eine (? eindeutig bestimmte?) Matrix $\boldsymbol{A}$ zu finden, sodass gilt: $\boldsymbol{A} * \mathbf{x}_j = \mathbf{y}_j, 1 \leq j \leq n$. Unter welchen Voraussetzungen ist die Realisierung eines solchen Vorhabens sicher nicht möglich?

2 Rechnen mit Skalarprodukten

Erinnere (Voraussetzungen): Definition von Skalarprodukten in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$, sowie Definition von Orthogonalität, Orthogonalsysteme bzw. Orthonormalsysteme (normierte Vektoren).

2.1 Orthogonalität und lineare Unabhängigkeit

Der Beweis des folgenden Lemmas kann als typische Prüfungsfrage gewertet werden:

rthlinunabh1 **Lemma 1.** *Es sei $(\mathbf{b}_j)_{j=1}^n$ eine Folge von Vektoren in $\mathbb{C}^m$, welche paarweise zueinander orthogonal stehen und alle von $\vec{\mathbf{0}}$ verschieden sind. Dann bilden diese eine linear unabhängige Menge. Insbesondere gilt: Wenn $\boldsymbol{B}$ die $m \times n$-Matrix ist, die diese Vektoren als Spalten enthält, dann ist der Rang von $\boldsymbol{B}$ gleich n (und notwendigerweise gilt dann auch noch $n \leq m$).*

Proof. Es genügt zu zeigen, dass die Vektoren linear unabhängig sind.
Sei also $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{b}_k = \vec{\mathbf{0}}$. Dann gilt natürlich für jedes $j, (1 \leq j \leq n)$:

$$0 = \langle \vec{\mathbf{0}}, \mathbf{b}_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n c_k \langle \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_j \rangle = c_k \langle \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_k \rangle = c_j \|\mathbf{b}_j\|^2,$$

weil $\langle \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_j \rangle = 0$ für $k \neq j$, und somit erhalten wir $c_j = 0$ weil $\|\mathbf{b}_j\| \neq 0$ gilt! □

Die soeben diskutierte Situation kann auch kurz so beschrieben werden: Wenn $\boldsymbol{B}' * \boldsymbol{B}$ eine invertierbare Diagonalmatrix ist, dann sind die Spalten von $\boldsymbol{B}$ linear unabhängig.

Besonders interessant ist natürlich der Spezialfall eines Orthonormalsystems, mit $\boldsymbol{B}' * \boldsymbol{B} = \mathbf{I}_n$, weil dann für $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{b}_k$ gilt: $c_j = \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_j \rangle, 1 \leq j \leq n$.

Später werden wir noch sehen, dass die Invertierbarkeit von $\boldsymbol{B}' * \boldsymbol{B}$ (der sog. *Gram-Matrix*) gleichwertig ist mit der linearen Unabhängigkeit der Spalten von $\boldsymbol{B}$ (auch wenn $\boldsymbol{B}' * \boldsymbol{B}$ keine Diagonalmatrix ist).[1] Dahinter steckt die Aussage

GramNull1 **Lemma 2.**

$$\mathrm{Null}(\boldsymbol{B}' * \boldsymbol{B}) = \mathrm{Null}(\boldsymbol{B}) \subset \mathbb{C}^n. \tag{1}$$ GramNull2

Proof. Die Inklusion $\subseteq$ ist klar, weil aus $\boldsymbol{B} * \mathbf{x} = \mathbf{0}$ folgt, dass $\boldsymbol{B}' * (\boldsymbol{B} * \mathbf{x}) = \boldsymbol{B}' * \mathbf{0} = \mathbf{0}$).

Um die Umkehrung zu zeigen, betrachte man, dass unter Verwendung des Assoziativgesetzes für die Matrix Multiplikation und des Zusammenhanges zum Skalarprodukt aus $\boldsymbol{B}' * \boldsymbol{B} * \mathbf{x} = \mathbf{0}$ folgt:

$$0 = \langle \boldsymbol{B}' * \boldsymbol{B} * \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}' * (\boldsymbol{B}' * \boldsymbol{B} * \mathbf{x}) = (\boldsymbol{B} * \mathbf{x})' * (\boldsymbol{B} * \mathbf{x}) = \|\boldsymbol{B} * \mathbf{x}\|^2,$$

also $\boldsymbol{B} * \mathbf{x} = \mathbf{0}$, d.h. $\mathbf{x} \in \mathrm{Null}(\boldsymbol{B})$, womit die umgekehrte Inklusion $\supseteq$ bewiesen ist. □

2.2 Konsequenzen der Gauss Elimination

Es ist klar aus der Berechnung des Ranges einer Matrix mit Hilfe der Gauss Elimination, dass für jede $m \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$ gilt:

$$\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A}) = r := \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) \leq \min(m, n). \tag{2}$$ maxrang1

Ein übliche Formulierung dieser Tatsache besagt, dass mehr als n Vektoren im $\mathbb{K}^m$ linear abhängig sind. Das kann wie folgt begründet werden:

morethann1 **Lemma 3.** *Die Spalten einer $m \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$ sind linear abhängig, wenn $n > m$ ist.*

Proof. Im Prinzip ist das nur eine einfache Folge von Gleichung (maxrang1 2). Aber führen wir es im Detail nochmals aus:

Bekanntlich sind die einzelnen Schritte der Gauss-Elimination so, dass sie die Lösungsmenge nicht verändern, d.h. die Zeilenstufenform $\mathbf{Z}$ einer Matrix $\boldsymbol{A}$ hat dieselben Lösungen wie die Matrix $\boldsymbol{A}$ selber. Mit anderen Worten: Wenn die Spalten von $\boldsymbol{A}$ linear unabhängig sind, dann sind es auch die Spalten von $\mathbf{Z}$ (und umgekehrt).

Hat nun $\boldsymbol{A}$ mehr Spalten als Zeilen, dann ist klar, dass es höchstens $m (= \min(m, n))$ Pivot-Elemente geben kann. Im angenommenen Fall, dass $n > m$ gilt, muss es also eine Nicht-Pivot Spalte in $\mathbf{Z}$ geben, also muss es einen Koeffizientenvektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{K}^n$ geben, mit $\sum_{k=1}^n x_k \mathbf{z}_k = \mathbf{0}$. Da aber die entsprechende lineare Relation auch für die Spalten von $\boldsymbol{A}$ gilt, d.h. auch $\sum_{k=1}^n x_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$, sind die Spalten von $\boldsymbol{A}$ linear abhängig. □

Später wird daraus leicht folgen, dass in jedem m-dimensionalen Vektorraum mehr als m Vektoren mit Sicherheit linear abhängig sind.

NEU: 28. April 2014

[1] Ebenfalls ein typischer Beweis, der beim Kolloqium gefragt wird!

2.3 Erweiterung von linear unabhängigen Mengen

Das folgende Lemma spielt eine wichtige Rolle in der (abstrakten wie konkreten) linearen Algebra:

`linindept1` **Lemma 4.** *Angenommen $M = \{\mathbf{m}_1, \cdots, \mathbf{m}_r\}$ ist eine linear unabhängige Menge in $\boldsymbol{V}$, und $\mathbf{m}_{r+1}$ sei nicht linear abhängig von M, d.h. $\mathbf{m}_{r+1} \notin \mathcal{L}(\mathcal{H})M$. Dann ist auch $M_1 = \{\mathbf{m}_1, \cdots, \mathbf{m}_{r+1}\}$ eine linear unabhängige Menge und $\mathcal{L}(\mathcal{H})M$ ist echt in $\mathcal{L}(\mathcal{H})M_1$ enthalten.*

Proof. Es sei $\sum_{k=1}^{r+1} c_k \mathbf{m}_k = \mathbf{0} \in \boldsymbol{V}$. Wenn $c_{r+1} \neq 0$ gilt, dann ist

$$\mathbf{m}_{r+1} = -\frac{1}{c_{r+1}} \sum_{k=1}^{r} c_k \mathbf{m}_k,$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit des neuen Elementes $\mathbf{m}_{r+1}$ von den Elementen von M. Ist allerdings $c_{r+1} = 0$, dann folgt aus der Annahme, dass de facto die kürzere Summe $\sum_{k=1}^{r} c_k \mathbf{m}_k = \mathbf{0}$ erfüllt, somit wegen der linearen Unabhängigkeit der Menge M, dass auch die Koeffizienten mit $1 \leq j \leq r$ gilt $c_j = 0$. W.z.z.w. □

In die andere Richtung hat man ein Reduktionslemma:

`reducegen1` **Lemma 5.** *Angenommen $M = \{\mathbf{m}_1, \cdots, \mathbf{m}_r\}$ ist eine linear abhängige Erzeugermenge für einen Teilraum $\boldsymbol{W}$ von $\boldsymbol{V}$. Dann gibt es eine Element $\mathbf{m}_j$ welches eine Linear-Kombination der übrigen Elemente, d.h. von Elemente der Menge $M_1 := M \setminus \{\mathbf{m}_j\}$ ist, dass aber weiterhin $\mathcal{L}(\mathcal{H})M = \mathcal{L}(\mathcal{H})M_1 = \boldsymbol{W}$ gilt.*

Proof. Wenn eine nichttriviale Linearkombination $\sum_{k=1}^{r} c_k \mathbf{m}_k = \mathbf{0}$ möglich ist, dann gibt es mindestens zwei (!) Koeffizienten $c_k \neq 0$. O.b.d.A. können wir den letzten dieser Koeffizienten nehmen (nennen wir ihn j), sodass sich das zugehörige Element als Linear-Kombination der Form $-1/c_j \sum_{k=1}^{j-1} c_k \mathbf{m}_k$ schreiben lässt.

Hat man eine beliebigen Linear-Kombination von Elementen aus M so kann man sie durch Ersetzen des Beitrages von $\mathbf{m}_j$ natürlich auch als Element von $\mathcal{L}(\mathcal{H})M_1$ schreiben, mit $M_1 := M \setminus \{\mathbf{m}_j\}$. □

Hat man diese **beiden Prinzipien**, ergibt sich sofort die Möglichkeit, eine **Basis für einen Vektorraum** herzustellen, und zwar auf zwei verschiedene Methoden:

Entweder man versucht ein *maximal linear unabhängiges System* zu finden (durch fortgesetzte Erweiterung!), oder man versucht ein *minimales Erzeugersystem* (durch fortgesetztes Entfernen und Beibehaltung der linearen Hülle) herzustellen.

Da ein linear unabhängiges System in einem Raum mit endlicher Erzeugermenge somit auch eine endliche (!) Basis hat bzw. lin. unabh. Mengen maximal soviele Elemente haben wie das Erzeugersystem folgt daraus die Existenz einer endlichen Basis in jedem endlichdimensionalen Vektorraum. (nach Def.: Vektorraum mit endlichem Erzeugersystem). Details folgen noch! Ende 28.April. 2014

2.4 Erzeugendensysteme

Für jede endliche Menge M von n Vektoren im $\mathbb{K}^k$ können wir durch Bilden einer entsprechenden Matrix (welche diese Vektoren als Spalten oder Zeilen enthält) den von M aufgespannten Teilraum von $\mathbb{K}^k$, d.h. die lineare Hülle als Spaltenraum einer $n \times k$ Matrix $\boldsymbol{A}$ bzw. als Zeilenraum einer $k \times n$ Matrix $\boldsymbol{B}$ (welche natürlich mit $\boldsymbol{A}^t$ identisch ist) auffassen!

lincombcomb1 **Lemma 6.** *Für jede Menge M' mit $M \subseteq M' \subset \mathbf{LH}(M)$ gilt:*

$$\mathbf{LH}(M') = \mathbf{LH}(M).$$

Proof. Es ist klar, dass $\mathbf{LH}(M) \subseteq \mathbf{LH}(M')$ gilt.

Um die Umkehrung zu beweisen, denken wir uns M und M' als Matrix mit Spaltenvektoren. Dann ist $M' = \boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}$ für eine passende Koeffizientenmatrix B, welche die Spalten von $\boldsymbol{A}$ zu den Elementen von M' linear kombiniert. Jedes Element $\mathbf{y} \in \mathbf{LH}(M')$ ist dann von der Form

$$\mathbf{y} = (\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}) * \mathbf{x} = \boldsymbol{A} * (\boldsymbol{B} * \mathbf{x}) \in \mathbf{LH}(M),$$

womit die Umkehrung bewiesen ist. □

samelinspan1 **Corollary 1.** *Zwei Mengen M bzw. M' haben genau dann die gleiche lineare Hülle (das gleiche lineare Erzeugnis), wenn gilt*

$$M' \subset \mathbf{LH}(M) \quad \textit{and} \quad M \subset \mathbf{LH}(M'). \tag{3}$$ samespan1

Proof. (Gutes Übungsbeispiel) Es ist klar, dass die angegebenen Voraussetzungen notwendig sind, d.h. wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann gelten aufgrund des vorigen Lemmas die entsprechenden Enthaltensrelationen in symmetrischer Form, d.h. die beiden Mengen haben die gleiche lineare Hülle.

Umgekehrt sei nun $\mathbf{LH}(M') \subseteq \mathbf{LH}(M)$. Dann muss aber auch $M' \subset \mathbf{LH}(M') \subseteq \mathbf{LH}(M)$ gelten, und aus symmetrischen Gründen $M \subset \mathbf{LH}(M')$. □

Anwendung dieses Prinzips ergibt: **Das lineare Erzeugnis der Pivotzeilen einer Matrix $\boldsymbol{A}$ ist gleich dem Spaltenraum.**

Als Begründung kann man angeben: Nach Konstruktion sind die Nicht-Pivotspalten Linear-Kombinationen der Pivotspalten (die davor vorkommen). Somit kann man als Menge M die Menge der Pivot-Spalten nehmen und als Menge M' die Menge aller Spalten. Klarerweise ist dann (nach Definition des Begriffes) $\mathbf{LH}(M')$ der Spaltenraum von $\boldsymbol{A}$ (kurz $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A})$). Die Pivot-Spalten $\mathbf{a}_{p_1}, \cdot, \mathbf{a}_{p_r}$ (wobei $p_1, \cdot, p_r$ die Nummern der Pivotspalten sind) sind also ein Erzeugendensystem für den Spaltenraum von $\boldsymbol{A}$. Andererseits sind sie *linear unabhängig* [2], und somit eine *Basis* für den Spaltenraum.

Wir haben also herausgefunden, dass die r Pivotspalten der (ursprünglichen!) Matrix $\boldsymbol{A}$ eine Basis für den Spaltenraum von $\boldsymbol{A}$ sind, während die (ebenfalls $r =$ Anzahl der Pivotelemente) Zeilen der Zeilenstufenform bzw. reduzierten Zeilenstufenform eine Basis für den Zeilenraum $\mathbf{Z}(\boldsymbol{A})$ von $\boldsymbol{A}$ sind, also gleich viele Elemente haben.

[2] Das zeigt man genauso wie die lineare Unabhängigkeit der Zeilenvektoren in der Zeilenstufenform, hier indem man nutzt, dass die Einsen in den Zeilen mit Nummern $1, \cdot, r = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ zu finden sind

Man spricht in der Literatur davon, dass *Zeilenrang* (= Dimension des Zeilenraumes $\boldsymbol{A}$) gleich *Spaltenrang* (= Dimension des Spaltenraumes von $\boldsymbol{A}$) ist.

Die Unabhängigkeit der Anzahl der Elemente von der konkreten Basis, d.h. die Aussage, dass zwei Basen für denselben Raum gleichviele Elemente haben müssen, ist noch separat zu diskutieren. Wir haben also im Moment nur gezeigt, dass zwei konkrete Basen, eine für den Spaltenraum von $\boldsymbol{A}$ und die andere für den Zeilenraum von $\boldsymbol{A}$ gleich viele Elemente haben.[3]

2.5 Die Dimensionsformel und Konsequenzen

IM FALL von $n \times n$-Matrizen, hat das Gauss'sche Eliminationsverfahren schwerwiegende bzw. wichtige Konsequenzen, vor allem die Dimensionsformel. Es ist klar, dass in der Zeilenstufenform eine Klassifizierung der Spalten in Pivot-Spalten (wir schreiben $p_1, \cdot, p_r$) und Nicht-Pivot-Spalten erfolgt, wobei $r = \text{rank}(\boldsymbol{A})$ ist, und $n - r$ ist die Zahl der freien Parameter, oder gleichbedeutend die Dimension des Nullraumes von $\boldsymbol{A}$. Die übliche Form ist: Setze die *abhängigen* Variablen mit λ, μ, ν etc. beliebig fest und rechne dann durch die übliche Rücksubstitution die abhängigen Variablen (die den Pivot-Elementen) entsprechen, auf eindeutig Art und Weise aus.

Nimmt man eine etwas andere Bezeichnung, so erhält man: Sei $s = n - r$, und $q_1, \cdot q_s$ die Liste der Non-Pivot-Spalten von $\boldsymbol{A}$. Dann kann man die gegebene "Ebene" mit anderen "Hyperebenen", die durch $x_{q_j} = 1$ und $x_{q_k} = 0$ für $k \neq j$ gegeben sind, schneiden, um sie eindeutig bestimmte Punkte bzw. Vektoren $\mathbf{h}_j$ zu finden $(1 \leq j \leq s)$ zu bestimmen, und als Koordinatensystem bekommt man genau die Vektoren, die zu diesen Punkten gehen. (ist wohl noch genauer zu erklären!) 7.4.2014, hgfei.

3 Invertierbarkeitskriterien

injmatrix **Theorem 1.** *Die folgenden Eigenschaften einer Matrix sind äquivalent:*

1. *Die lineare Abbildung* $T : \vec{\mathbf{x}} \mapsto \boldsymbol{A} * \vec{\mathbf{x}}$ *ist injektiv;*
2. $\boldsymbol{A} * \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$.
3. *Die Spalten von* $\boldsymbol{A}$ *sind linear unabhängig.*

Proof. Wenn T injektiv ist, dann folgt wegen $T(\mathbf{0}) = T(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ auch die Umkehrung: Wenn $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ gilt, dann ist notwendigerweise auch $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Umkehrt folgt aus (ii) auch (i), denn wenn $T(\mathbf{x}_1) = T(\mathbf{x}_2)$ gilt, dann ist ja (wegen der Linearität) auch $T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$, also $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, und somit $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Die dritte Formulierung ist lediglich eine terminologische Variante dieser beiden äquivalenten Aussagen. □

[3] Hätte man zweimal Gauss-Elimination betrieben, einmal für $\boldsymbol{A}$ und einmal für $\boldsymbol{A}^t$, so hätte man ebenfalls zwei Basen für diese Räume bekommen, es wäre aber nicht klar gewesen, warum diese gleich viele Elemente haben. In der vorher gegebenen Argumentation ergibt sich das aus den Eigenschaften der Gauss-Elimination!

invmatrix **Theorem 2.** *Die folgenden Eigenschaften einer Matrix sind äquivalent*

1. *Die lineare Abbildung* $T : \vec{\mathbf{x}} \mapsto \boldsymbol{A} * \vec{\mathbf{x}}$ *ist bijektiv;*
2. *Die* $n \times n$*-Matrix* $\boldsymbol{A}$ *ist invertierbar;*
3. *Die Spalten von* $\boldsymbol{A}$ *sind linear unabhängig und bilden daher eine Basis des* $\mathbb{K}^n$.

Proof. BEWEIS: □

3.1 Antworten auf bisher gemachte Übungsaufgaben

Vor allem die eher "theoretisch" wahrgenommenen Beispiele scheinen relativ große Probleme gemacht zu haben. Daher hier ein paar "Antworten" bzw. eine Sammlung von Fakten, die ganz allgemein bzw. bei der positiven Beantwortung der gestellten Übungsaufgaben hilfreich sind bzw. gewesen wären.

Beispielsweise das Beispiel mit der "orthogonalen Projektion" auf eine Gerade (d.h. auf den 1-dimensionalen Teilraum der durch einen normierten Richtungsvektor $\vec{\mathbf{u}}$ gegeben ist. Im Falle von $n = 2, 3$ ist dies eine Gerade durch den Ursprung mit Richtungsvektor $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$, hat also gute *geometrische Bedeutung*, obwohl diese bei den Rechnungen keine Rolle (mehr) spielen (müsse bzw. sollten).

Wir erinnern: Das Skalarprodukt von zwei Spaltenvektoren im $\mathbb{C}^n$ kann durch Matrixmultiplikation realisiert werden, d.h. der math. Ausdruck (l.S.) wird durch den berechenbaren Ausdruck (r.S.) in in MATLAB bzw. OCTAV realisiert:

$$\langle \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \rangle == \mathbf{y}' * \mathbf{x}.$$

$$P_{\mathbf{u}} : \mathbf{x} \to \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}$$

ist also eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$, deren Matrixdarstellung sich wie folgt ergibt:

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u} * (\mathbf{u}' * \mathbf{x}) = (\mathbf{u} * \mathbf{u}') * \mathbf{x}.$$

Diese Matrix

$$\mathbf{P} := \mathbf{u}' * \mathbf{u}$$

(vom Format $n \times n$) kann durch Tabellen-Multiplikation erzeugt werden werden, d.h. $p_{j,k} = u_j \cdot u_k, 1 \leq j, k \leq n$. Man beachte, dass diese Matrix *symmetrisch* (also $\mathbf{P}' = \mathbf{P}$) ist und (das wird unten nochmals direkt verifiziert) *idempotent*, d.h. es gilt $\mathbf{P} * \mathbf{P} = \mathbf{P}$, denn es gilt unter Zuhilfenahme des Assoziativgesetzes:

$$\mathbf{P} * \mathbf{P} = (\mathbf{u} * \mathbf{u}') * (\mathbf{u} * \mathbf{u}') = \mathbf{u} * (\mathbf{u}' * \mathbf{u}) * \mathbf{u}' = \mathbf{u} * (1 \cdot \mathbf{u}') = \mathbf{u} * \mathbf{u}' = \mathbf{P}.$$

Auch hier (so wie unten) wird verwendet, dass

$$\mathbf{u}' * \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 = 1^2 = 1$$

vorausgesetzt wird. Die Symmetrie folgt sofort aus den Regeln des Rechnens mit (konjugiert) transponierten Matrizen und der Tatsache, dass $(\mathbf{u}')' = \mathbf{u}$ gilt.

Proof:

$$\langle \mathbf{x} - P_{\mathbf{u}}x, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle - \langle P_{\mathbf{u}}x, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = 0.$$

Was nun gefragt ist, sind die folgenden Eigenschaften von $\mathbf{P}$: Man soll zeigen, dass $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ ist, d.h. es ist zu zeigen dass $P_{\mathbf{u}}(P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) = P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ gilt.

Das sieht man schnell ein mit Hilfe der Rechenregeln für das Skalarprodukt, die wir hier schnell zusammenfassen:

- $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle$
- $\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle$.

Zuerst stellen wir fest, dass $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$, also

$$P_{\mathbf{u}}(P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) = P_{\mathbf{u}}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle\mathbf{u}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle P_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle\mathbf{u} = P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$$

Nun ist noch zu zeigen, dass $\mathbf{x} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ senkrecht auf $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ steht. Da $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ aber ohnehin ein Vielfaches von $\mathbf{u}$ ist, genügt es zu zeigen (ist in er Tat dasselbe), dass $\mathbf{u}$ senkrecht auf $\mathbf{x} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ steht. Dazu betrachten wir das folgende Skalarproduct

$$\langle \mathbf{x} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle - \langle P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle - \langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle = 0.$$

Solche Rechnung sind typische Beispiele für Dinge, die man sich soweit einprägen sollte, dass sie auch in einer Prüfungssituation reproduzierbar werden, allerdings nicht aufgrund von Merkregeln, sondern aufgrund der Tatsache, dass *"klar ist, was zu beweisen ist"* und dann auch, sobald man das aufgeschrieben hat, umsetzbar ist, ohne dass man sich viel *merken muss!*

Etwas später werden wir noch mehr sehen, nämlich dass unter gewissen Voraussetzungen (paarweise Orthogonalität) auch Summen von solchen Projektions-Operatoren selbst wieder Projektionsoperatoren sind, d.h. *idempontent* und symmetrisch.

Um ein "Gefühl dafür" zu bekommen, betrachten wir vorerst eine Summe von zwei Projektionsoperatoren. Es ist vielleicht instruktiv, sich den Fall vorzustellen, dass die Projektions- Operatoren einfach von den Einheitsvektoren erzeugt werden. Dann ist der zu $\mathbf{u} = \mathbf{e}_k$ gehörige Projektionsoperator einfach $\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_k$, oder die Diagonalmatrix, die von $\mathbf{e}_k$ erzeugt wird, oder einfach eine Nullmatrix, die lediglich an der Stelle (k, k) (k-te Koordinate in der Diagonale) eine 1 stehen hat. Die Projektion auf die $x - y$-Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist aber gerade die Summe zweier solcher Matrizen, und zwar $\mathbf{e}_1$ sowie $\mathbf{e}_2$. Die zugehörige Diagonalmatrix hat in der Diagonale den Vektor $[1, 1, 0]$ stehen, ist ebenfalls idempotent und symmetrisch.

Das ist aber kein Zufall, sondern eine ganz allgemein gülte Aussage.

sumONSproj1 **Lemma 7.** *Angenommen eine endliche Folge $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r$ im $\mathbb{R}^m$ bildet ein Orthonormalsystemn (zusammengefasst in Matrixschreibweise: $\mathbf{U}$ sei eine $m \times r$-matrix welche $\mathbf{U}' * \mathbf{U} = \mathbf{I}_r$ erfüllt). Dann ist*

$$\mathbf{U} * \mathbf{U}' = \sum_{k=1}^{r} P_{\mathbf{u}_k}$$

ein orthogonaler Projektionsoperator, dessen Bildbereich genau das lineare Erzeugnis der Vektoren $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r$ *ist, welches wir mit* $\boldsymbol{V}_{\mathbf{U}}$ *bezeichnen wollen.*

Dieser Raum ist r*-dimensional, denn die Familie* $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r$ *ist eine (orthonormale) Basis für diesen Raum. Weiters gilt für* $\boldsymbol{V}_{\mathbf{U}}$*: jeder Vektor* $\mathbf{v} \in \boldsymbol{V}_{\mathbf{U}}$ *hat die (eindeutige) Darstellung*

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{r} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^{r} P_{\mathbf{u}_k} \mathbf{v},$$

d.h. die eindeutig bestimmten Koeffizienten sind von der Form $c_k = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle$*, und die Länge erfüllt*

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{k=1}^{r} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{r} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle.$$

Bemerkung: Die *verbale* Beschreibung diese Sachverhaltes kann wie folgt gegeben werden: Hat man eine Orthonormalbasis für einen Teilraum $\boldsymbol{V}$ des $\mathbb{R}^m$, dann kann jeder Vektor in dem Raum in seine $\mathbf{u}_k$-Komponenten, d.h. die Bestandteile der Form $P_{\mathbf{u}_k}\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$ zerlegt werden, welche zueinander senkrecht stehen und gemeinsam jedes $\mathbf{v} \in \boldsymbol{V}$ darstellen.

Proof. Es gibt jetzt einige Dinge zu beweisen bzw. teilweise auch nächher zu erklären. Bespielsweise, dass $\sum_{k=1}^{r} P_{\mathbf{u}_k}$ eine Projektion definieren[4]

Zum Beweis brauchen wir eine kurze (auch geometrisch sehr einleuchtenden) Aussage: das Produkt (durch Hintereinanderausführen) von zwei zueinander orthogonalen Projektionen ist die Null-Abbildung!

Man kann das durch Anwenden auf einen festen Vektor verifizieren, noch eleganter ist es, die entsprechenden Matrizen zu verwenden. Seien also $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ zwei zueinander orthogonale Vektoren von Länge eins. Dann gilt

$$P_{\mathbf{u}_1} * P_{\mathbf{u}_2} = (\mathbf{u}_1 * \mathbf{u}_1') * (\mathbf{u}_2 * \mathbf{u}_2') = \mathbf{u}_1 * (\mathbf{u}_1 * \mathbf{u}_2) * \mathbf{u}_2' = \mathbf{u}_1 * (0 \cdot \mathbf{u}_2') = \mathbf{0},$$

the zero-matrix of format $n \times n$.

$\square$

END OF NEW MATERIAL 4.4.2014

[4] Die Symmetrie der entsprechenden Matrix, die ja eine Summe von symmetrischen Matrizen ist, sollte kein Problem darstellen!

4 Arbeiten mit der Zeilenstufenform

Beispiel: Wie produziere ich eine 4×5-Matrix vom Rang 3, deren Pivot-Spalten genau die Spalten mit den Nummern $1, 2, 4$ sind, d.h. die *Nicht-Pivot-Spalten* sind dann also 3 bzw. 5.

Man kann mit einer Zufallsmatrix beginnen, also z.B. eine ganzzahlige Matrix, und dann genau in der dritten bzw. fünften Spalte Linear-Kombinationen von davorstehenden Spalten verwenden:

```
AAA = round(7*rand(4,5));
AAA(:,3) =  AAA(:,1) + AAA(:,2);
[Summe aus Spalte 1 und Spalte 2]
AAA(:,5) =   - AAA(:,2) +3*AAA(:,4);
AAA hat als neue 5-te Spalte eine Lin.Komb. von 2. und 4.ter Spalte
```

Diese Matrix kann dann beispielsweise so aussehen:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 11 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \tag{4}$$

welche tatsächlich in der Zeilenstufenform so aussieht:

$$\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Da jeder mögliche Beitrag der Spalten 3 bzw. 5 (der Nicht-Pivotspalten[5]) von den Elementen der Pivot-Spalten kompensiert werden kann, kann man sich die Beträge dieser *Nicht-Pivot-Spalten* vorgeben, und muss dann nur die anderen Komponenten entsprechend adaptieren.

WENN ES NUR um EINE SPEZIELLE Lösung geht, ist es ausreichend, für diese Parameter beliebige Werte festzusetzen (auch die Wahl hier: Variablen x, y, z, u, v, wobei z (typischerweise $z = \lambda$) und v (typischerweise $v = \mu$ als zweiter freier Parameter), also auch $z = 0, u = 0$ ist möglich!

WENN z und u (die Variablen, die den Nicht-Pivot-Spalten entsprechen) mit λ und μ fixiert sind, so können die restlichen Variable (die *Pivotspalten sind ja linear unabhängig!*) eindeutig festgelegt werden!

Wir haben also geometrisch folgendes Bild[6] (allgemein gesprochen, für jede $m \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$): Die *Pivotspalten* der Matrix $\boldsymbol{A}$ bilden eine Basis für den Spaltenraum, weil offenkundig gilt:

- offenkundig sind sie linear unabhängig, denn die Pivot-Elemente stehen in verschiedenen Zeilen! (Beweis analog zur linearen Unabhängigkeit des Systems der Zeilgenstufen

[5] Warnung: das ist eher ein *Privatnotation* von hgfei!

[6] Dieses geometrische Konzept wird in den wenigsten Büchern klar besprochen, ich kann daher auch keine alternative Literaturquelle angeben!

- Andererseits sind sie ein Erzeugendensystem, denn alle nicht verwendeten Spalten sind ja nur Linear-Kombinationen der Pivot-Spalten von $\boldsymbol{A}$ (bei uns: die Spalten $1, 2, 4$).

- Zusammen ergeben die beiden Aussagen: Die Pivotspalten (!! nochmals, die Pivot-Spalten der ursprünglichen! Matrix, und nicht die der RZSF!!) bilden eine Basis für den Spaltenraum von $\boldsymbol{A}$.

Dabei wird noch verwendet: Die Pivot-Spalten der RZStF (reduzierten Zeilenstufenform) entstehen durch Anwenden (von links) von Elementarmatrizen, welche allesamt invertierbare lineare Abbildungen sind. Die Verhältnisse zwischen den Spaltenvektoren (nämlich lineare Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit) wird dadurch bewahrt. Insbesondere sind die Spalten der ursprünglichen Matrix, welche *den Pivotspalten entsprechen (!)* (bei uns also die Spalten $1, 2, 4$ eben linear unabhängig! und die restlichen Spalten sind linear abhängig, d.h. die dritte Spalte ist eine Lin.Komb. der ersten beiden Spalten (wir wissen es von der Konstruktion, dass es so ist, aber es genügt, die RZStF anzusehen, um genau das festzustellen!) und die 5-te Spalte ist eine Lin.Komb. der ersten 4 Spalten. Somit ist klar, dass das lineare Erzeugnis der Spalten $1, 2, 4$ dasselbe ist, wie das lineare Erzeugnis aller Spalten von $\boldsymbol{A}$, welches wir als Spaltenraum bezeichnet haben.

In unserem konkreten Fall geht es also um die $r \times m$, hier also 3×5-Matrix

$$SPBA = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Um noch einen kleinen Test zu machen können wir folgendes machen. Wir "würfeln" uns ein paar mögliche rechte Seiten, sagen wir 6 Vektoren aus dem Spaltenraum von $\boldsymbol{A}$, also $B = \boldsymbol{A} * (round(4 * rand(5, 6)))$ (also 6 zufällige Linearkombinationen der 5 Spaltenvektoren von AAA), um dann festzustellen, dass diese (offenbar eindeutig) durch

$$\begin{pmatrix} 96 & 70 & 91 & 80 & 52 & 79 \\ 28 & 24 & 3 & 14 & 4 & 19 \\ 44 & 32 & 29 & 32 & 22 & 37 \\ 50 & 33 & 52 & 44 & 35 & 46 \end{pmatrix} \tag{7}$$

um dann durch Inspektion der zusammengesezten Matrix die Konsistenz all dieser Gleichungen (jede der 6 Spalten von B ergibt ein konsistentes Gleichungssystem mit Systemmatrix AAA, aber auch mit der reduzierten Matrix die wir $SPBA$ genannt haben), wie man leicht am Ergebnis des Kommandos `rref([SPBA,B])` sieht, welches folgendes ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 5 & 6 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 4 & 13 & 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Will man noch genauer die richtigen Koeffizienten zurueckbestimmen, muss man nur folgenden Befehl eingeben:

```
COF = SPBA\B
```

der die Koeffizientenfolgen liefert (diese sind ja eindeutig, es sind sozusagen die Koeffizienten der Spalten von $\boldsymbol{B}$ bzgl. der Basis $SPBA$, welche aus $r = 3$ Spalten im $\mathbb{R}^4$ besteht!). Genauere Erläuterung des *BACKSLASH-Tricks* zum Lösen von linearen Gleichungssystemen folgt später.

Man kann auch die ganze Matrix aus den Pivot-Spalten (bei uns in der Matrix $SPBA$, die die Spalten-Basis von $\boldsymbol{A}$ enthält) zurückgewinnen, weil ja die linearen Abhängigkeiten ganz in $SPBA$ gespeichert sind. Als numerisches Experiment zur Bestätigung dieser abstrakten Aussagen schlage ich folgendes MATLAB Experiment vor:

```
>>[RRA,piv] = rref(A); % RRA: row reduced form of A
>> SPBA = A(:,piv);  % nur die Pivot-Spalten werden genommen
>> Arec =  SPBA *  RRA(1:rank(A),:) % neue Lin.Komb. der Pivotspalten
>> A - Arec   % numerisch praktisch gleich Null!
```

4.1 Zeilenrang, Spaltenrang, Rang der Matrix

Die obige Geschichte zeigt: Die mit Hilfe der Gauss Elimination bestimmten Basen (d.h. die Pivotzeilen der ZSF von $\boldsymbol{A}$ als Basis f.d. Zeilenraum $Z(\boldsymbol{A})$ von $\boldsymbol{A}$ bzw. andererseits die Pivotspalten aus $\boldsymbol{A}$ selber als Basis f.d. Spaltenraum $Sp(\boldsymbol{A})$) haben in der Tat gleich viele Elemente!!

Die übliche Definition der Dimension eines Vektorraumes, bisher also eines (linearen) Teilraumes des $\mathbb{R}^m$ (bzw. $\mathbb{R}^n$) setzt diese fest als Anzahl der Basis-Elemente einer (beliebigen) Basis des Vektorraumes

Leider fehlt uns da noch ein Argument: *Woher wissen wir, dass auch verschiedene Basen de facto gleichviele Elemente haben??*

Dazu gibt es verschiedene Überlegungen. Eine (von uns nicht verwendete) ist die Benützung des Austausch-Prinzips von Steinitz. Im Prinzip kann man immer einzelen Elemente einer Basis gegen bestimmte Elemente aus einer anderen Basis, ohne das Erzeugnis zu verändern. Da sich bei einer solchen Austauschprozedur die Anzahl der Elemente nicht ändern kann, muss sie *unabhängig* von der konkreten Basis sein.

Als Vorstufe dazu eine wichtige Beoachtung:

basisomorph1

Proposition 1. *Für jede Basis $\mathscr{B}$ eines Teilraumes $\boldsymbol{V}$ von $\mathbb{R}^m$ bestehend aus r Elementen stellt der Übergang vom Vektor $\mathbf{v} \in \boldsymbol{V}$ mit der eindeutigen Darstellung $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{b}_k$ zu den dadurch festgelegten Koeffizienten $\vec{\mathbf{c}} = (c_k)_{k=1}^r \in \mathbb{R}^r$ einen Isomorphismus zwischen $\boldsymbol{V}$ und $\mathbb{R}^r$ dar, d.h. eine bijektive und lineare Abbildung: $\mathbf{v} \mapsto \vec{\mathbf{c}}$.*

Es gilt aber auch die Umkehrung: Jeder Isomorphismus φ von $\mathbb{R}^r$ mit einem linearen Raum $\boldsymbol{V}$ induziert eine eindeutig bestimmte Basis: Die Elemente der Basis sind dann nämlich genau die Bilder der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^r$ unter φ, d.h. $\mathbf{b}_k := \varphi(\mathbf{e}_k)$, $1 \leq k \leq r$.

Proof. Es ist (hoffentlich) klar, dass die genannten Abbildungen bijektiv sind. Bespielsweise ist die Koeffizientenabbildung *surjektiv*, denn wenn man fragt, ob ein gegebener Vektor $\vec{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^r$ auch als Koeffizientenvektor eines Elementes $\mathbf{v} \in \boldsymbol{V}$ auftritt, genügt es ja explizit den Vektor $\mathbf{v} := \sum_{k=1}^r c_k \mathbf{b}_k$ zu bilden. Andererseits garantiert die *lineare Unabhängigkeit von Basisvektoren* (d.i. Teil der Definition!) die Injektivität der Abbildung.

Jede Verletzung der Injektivität würde sofort zu einer nicht-trivialen Linearkombination führen deren Summe der Nullvektor ist.

Umgekehrt ist klar dass die Bilder der Standard-Basis $(\mathbf{e}_k)_{k=1}^r$ in $\mathbb{R}^r$ unter einem Isomoprhismus eben genau wieder eine Basis für die Bildmenge $\boldsymbol{V}$ ist. Betrachtet man nun die Vektoren $\mathbf{b}_k = \varphi(\mathbf{e}_k)$ so ist klar, dass ein allgemeiner Vektor $\mathbf{v} \in \boldsymbol{V}$ von der Form

$$\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{x}) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{r} x_k \mathbf{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{r} x_k \varphi(\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{r} x_k \mathbf{b}_k$$

ist, und dass die eindeutig bestimmten Koeffizienten von $\mathbf{v}$ eben genau die Folge $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ ist.

Diese Diskussion zeigt (sollte allerdings noch genauer ausgeführt werden), dass die Koeffizientenabbildung bzw. die Abbildung φ invers zueinander sind.

□

Hat man nun also zwei Basen $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ für irgendeinen (als fix gedachten) linearen Teilraum $\boldsymbol{V}$ von $\mathbb{R}^m$, so hat man dementsprechend zwei Isomorphismen von $\boldsymbol{V}$ nach $\mathbb{R}^{r_1}$ bzw. nach $\mathbb{R}^{r_2}$ (wenn wir annehmen, dass $\mathscr{B}_1$ genau r_1 und $\mathscr{B}_2$ genau r_2 Elemente hat).

Durch Zusammensetzen, etwas das Bilden der Abbildung $T : \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ erhält man eine Komposition von Isomorphismen, als nun eine lineare und bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^{r_1}$ nach $\mathbb{R}^{r_2}$ (inverse dazu $T^{-1} : \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$). Für diese linearen Abbildungen muss es also entsprechende Matrizen $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{S}$ geben, vom Format $r_2 \times r_1$ resp. $r_1 \times r_2$. Durch Anwenden der Gauss-Elimination werden wir aber gleich sehen, dass dies nur der Fall sein kann, wenn $r_1 = r_2$.

Wäre beispielsweise $r_2 < r_1$, dann hätte $\mathbb{R}$ die Matrix höchstens $r_2 = min(r_1, r_2)$ Pivotelemente, also max. soviel lin. unabh. Spalten! es sind aber $r_2 > r_1$ Spalten, also muss wenigstens eine davon linear abhängig von den davorliegenden Spalten sein, aber das steht im Wiederspruch zur Injektivität des Systems. Natürlich kann man dieses Argument mit umgekehrten Vorzeichen (mittles $\mathbf{S}$) anwenden, wenn $r_1 > r_2$ gilt.

Somit kann man getrost definieren:

efdimension1 **Definition 1.** Um die *Dimension* eines Teilraumes $\boldsymbol{V}$ von $\mathbb{R}^m$ [7] zu bestimmen, eruiert man einfach die Anzahl der Basis-Elemente einer beliebigen Basis des Raumes.

Im Fall des Spaltenraums $\boldsymbol{V} := Sp(\boldsymbol{A})$ spricht man vom **Spaltenrang** der Matrix $\boldsymbol{A}$, der im $\mathbb{R}^m$ liegt, im Falle des Zeilenraumes $\boldsymbol{V} := Z(\boldsymbol{A})$ ist von einem Teilraum des $\mathbb{R}^n$ (in dem die Spalten von $\boldsymbol{A}'$ liegen!) die Rede, und man spricht vom **Zeilenrang**.

Eine der wichtigsten Ergebnisse der Gauss-Jordan-Normalform ist die Einsicht, dass sich diese beiden natŕlichen Zahlen für jede Matrix gleich sind. Daher ist es sinnvoll vom **Rang** der Matrix $\boldsymbol{A}$ (schlechthin) zu sprechen!

Dieselben Überlegungen, nun etwas kürzer gefasst, ergeben:

- Mehr als r Vektoren in einem r-dimenionsalen Teilraum $\boldsymbol{V}$ von $\mathbb{R}^m$ sind notwendigerweise linear abhängig. Insbesondere sind *mehr als m Vektoren im* $\mathbb{R}^m$ *stets linear abhängig;*

[7] (m beliebig, auch $\mathbb{R}^n$ ist hier zulässig)

- Hat man hingegen weniger als r Vektoren, so sind diese sicher kein Erzeugendensystem für $\boldsymbol{V}$. Gäbe es nämlich ein derartiges Erzeugendensystem, so könnte man daraus (notfalls durch Weglassen von allenfalls linear abhängigen Elementen) sogar eine Basis mit WENIGER als r Vektoren finden, im Widerspruch zur oben beschriebenen Beobachtung (jede! Basis von $\boldsymbol{V}$ hat genau r Elemente!).

4.2 Lineare Unabhängigkeit und Abbildungen

linabhabb1 **Lemma 8.** *Es sei T eine lineare Abbildung von einem Vektorraum $\boldsymbol{V}$ in einen anderen, den wir $\boldsymbol{W}$ nennen wollen. Dann gilt:*

1. *Ist $M \subset \boldsymbol{V}$ eine linear abhängige Menge, dann ist auch $T(M)$ linear abhängig (d.h. lineare Abhängigkeit bleibt unter linearen Abb. erhalten!);*
2. *Ist T ausserdem injektiv, also insbesondere falls T ein linearer Isomorphismus ist (bijektiv nd linear), dann sind die Bilder von linear unabhängigen Mengen auch wieder linear unabhängig.*

Proof. (i) Nach Voraussetzung gibt es eine endliche Folge von $m_1, \cdots, m_n$ von Elementen in M und eine nicht-triviale (d.h. vom Nullvektor $\vec{\mathbf{0}}$ verschiedene) Koeffizientenfolge $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^n$, sodass $\sum_{k=1}^n x_k m_k = \mathbf{0} \in \boldsymbol{V}$. Dann gilt aber auch

$$\sum_{k=1}^n x_k T(m_k) = T\left(\sum_{k=1}^n x_k m_k\right) = T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \boldsymbol{W}.$$

(ii) Es sei nun umgekehrt eine beliebige Folge im Bild von M unter T gegeben, d.h. $T(m_1), \cdots, T(m_n)$. Wir wollen zeigen, dass diese Folge unabh. ist, falls die ursprüngliche Folge $m_1, \cdots, m_n$ linear unabhängig war.

Dazu betrachten wir eine Linear-Kombination der betrachteten Elemente, mit zunächst beliebig gewählten Koeffizienten, welche $\mathbf{0} \in \boldsymbol{W}$ ergibt, d.h. wir nehmen an, es gelte

$$\sum_{k=1}^n x_k T(m_k) = \mathbf{0} \in \boldsymbol{W}.$$

Dieselbe Rechnung wie oben (Linearität von T) ergibt aber, dass diese *gleichbedeutend* mit der Annahme $T\left(\sum_{k=1}^n x_k m_k\right) = \mathbf{0}$ ist. Da stets $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gilt und T als *injektiv* vorausgesetzt war, folgt also, dass der Ausdruck $\sum_{k=1}^n x_k m_k$ gleich dem Nullvektor $\mathbf{0} \in \boldsymbol{V}$ sein muss. Dann kommt aber die Voraussetzung über die lineare Unabhängigkeit von M ins Spiel und wir können schließen, dass $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \in \mathbb{K}^{\mathbf{n}}$ ist. Damit ist der Beweis fertig. □

Offenbar gilt in Kombination der Beobachtungen:

isomprop1 **Lemma 9.** *Wenn T ein linearer Isomorphismus zwischen zwei Vektorräumen $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ ist, dann entsprechen unter der Abb. T einander genau Basen (von $\boldsymbol{V}$ resp. $\boldsymbol{W}$), oder lineare (Un)Abhängigkeit, oder auch nur Erzeugendensysteme.*

Insbesonderer haben isomorphe Vektorräume die gleiche Dimension!

Dieses Prinzip werden wir sehr bald in großem Umfang zur Behandlung von weiteren Vektorräumen verwenden, die wir wieder genauso wie den $\mathbb{R}^m$ behandeln werden, durch Einführung einer Basis.

Man kann die oben gemachten Beobachtungen auch noch weiter ausdehen bzw. konkretisieren. Angenommen, es bestehen irgend welche linearen Relationen zwischen den Spalten der ursprünglichen Matrix, beispielsweise, dass die dritte Spalte der Matrix die Summe der beiden ersten Spalten ist (oder eben eine Lin.Komb. derselben). Dann ist klarerweise der Spaltenvektor $\mathbf{v}_0 := [1, 1, -1, 0, \cdots, 0]$ im Nullraum von $\boldsymbol{A}$ (er bildet ja eine Lineare Kombination der ersten drei Spalten welche auf nicht-triviale Weise den Nullvektor darstellt). Also liegt $\mathbf{v}_0$ im Kern (Nullraum) der Matrix $\boldsymbol{A}$, aber diese Eigenschaft bleibt unter Anwendung von jeder (invertierbaren!) Elementarmatrix (Wirkung von links) erhalten. Es muss also dieselbe Relation in der RZSF $\mathbf{Z}$ zu sehen sein. Wenn die ersten beiden Spalten linear ängig voneinander sind, dann sind die ersten beiden Spalten von $\mathbf{Z}$ einfach die beiden ersten Eigenvektoren, und in der dritten Spalte wird stehen, wie diese Spalte aus den vorhergehenden zusammengesetzt ist, d.h. wir können schon vorhersagen, dass in der dritten Spalte von $\mathbf{Z}$ der Vektor $[1; 1; 0, \cdots, 0]$ stehen wird. Es gilt dasselbe aber auch umgekehrt (und ist vermutlich wertvollere Information). Wenn wir eine Nicht-Pivotzeile (von $\mathbf{Z}$ beobachten, dann ist evident, dass sie sich als Linear Kombination der vorangegangenen Spalten schreiben läßt, und zwar genau mit den in dieser Spalte befindlichen Koeffizienten. Insbesondere kann man aus den Pivot-Spalten sowie der Information die in der Zeilenstufenform $\mathbf{Z}$ stecken, die ganze Matrix $\boldsymbol{A}$ wieder regenerieren!

Anders ausgedrückt: Wenn man eine rechte Seite $\vec{\mathbf{b}}$ vorfindet, sodass das Gleichungssystem $\boldsymbol{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsistent (d.h. lösbar) ist, dann muss offenbar $\vec{\mathbf{b}}$ im Spaltenraum von $\boldsymbol{A}$ liegen, und um in diesem eine eindeutige Darstellung zu bekommen, braucht man nur (irgendeine) Basis des Spaltenraumes von $\boldsymbol{A}$ verwenden. Das bedeutet konkret, dass man mit den **Pivot-Spalten der urspünglichen Matrix** arbeiten kann (etwas genauer/pedantischer: gemeint sind die Spalten der ursprünglichen Matrix $\boldsymbol{A}$ an deren Positionen sich in der RZSF $\mathbf{Z}$ nach Ende der Gauss-Jordan Elimination die Pivot-Elemente zu finden sind. In der Tat sind diese eine Basis für den Spaltenraum, weil sie einerseits den ganzen Spaltenraum aufspannen (die Nicht- Pivot Spalten sind ja Linearkombinationen, und aus weiteren Linearkombinationen bildet man definitionsgemäß alle Elemente des Spaltenraums, aber das ist nicht mehr als die lineare Hülle der (linear unabhängigen) Pivot-Spalten von $\boldsymbol{A}$.

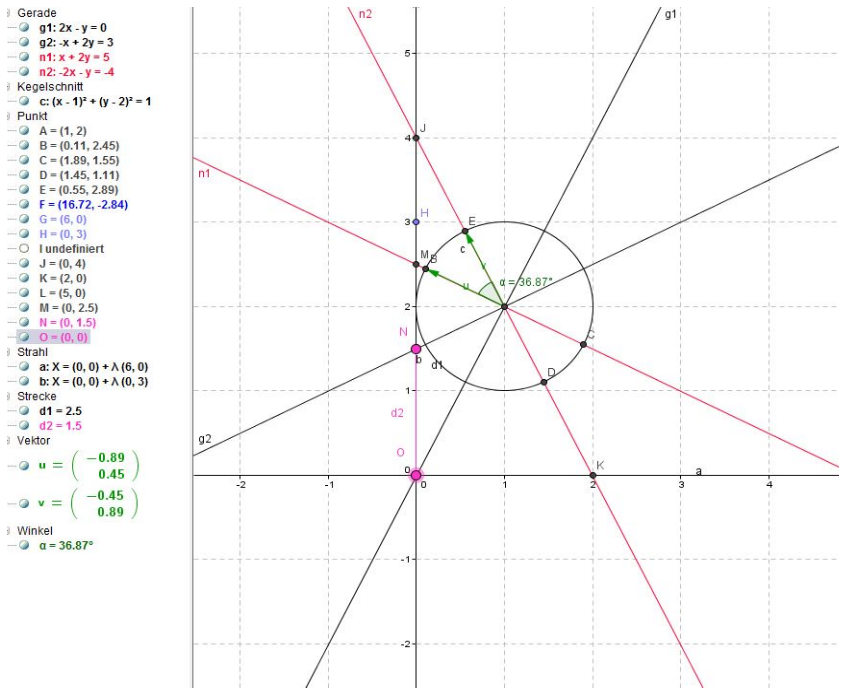
Wenn also ein Vektor $\vec{\mathbf{b}} \in \mathrm{Sp}(\boldsymbol{A})$ darstellbar ist, dann auch $\vec{\mathbf{b}}$ weniger eine beliebige(!!) Linear-Kombination von Non-Pivot-Spalten von $\boldsymbol{A}$, weil das innerhalb von $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A})$ möglich ist (Lösbarkeit bleibt erhalten!).

Das wiederum ist gleichbedeutend damit, dass in der "Darstellung" eines gegebenen Vektors ein beiliebiger Anteil (auch Koeffizient Null ist möglich) eines jeden Nicht-Pivot-Spaltenvektors vorgegeben werden kann. In der konkreten Berechnungsmethode sieht man diese "freien Parameter" in den Nicht-Pivot-Spalten (man setzt z.B. $z = \lambda, v = \mu$) und man diese Ausdrücke auf die rechte Seite bringt (wobei ein negatives Vorzeichen entsteht!) dienen sie der Erklaerung der allgemeinen Lösung (typischerweise in Parameterform). Die Zahl der freien Parameter ist übrigens genau $n - r$, denn wir haben n Spalten in einer allgemeinen $n \times m$-Matrix $\boldsymbol{A}$, und davon sind (definitionsgemäß) genau r (r steht für den **Rang** von $\boldsymbol{A}$).

D:\coursfei\SS14\ELA14.tex

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

$\vec{s} = [1; 2; 3; 4]$; $\vec{\mathbf{s}} = [1; 2; 3; 4]$;



DOWNLOAD from:
http:\\www.univie.ac.at\NuHAG\FEICOURS\ss14\gilstrang02.ggb

[3],

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weissaue/vorlesungsskripte/FUNKT.pdf

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \cos(z) & -\sin(z) \\ sin(z) & \cos(z) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(30) & -\sin(30) \\ sin(30) & \cos(30) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

$(a_1 a_2 a_3 a_4)$, but what does pma really do?

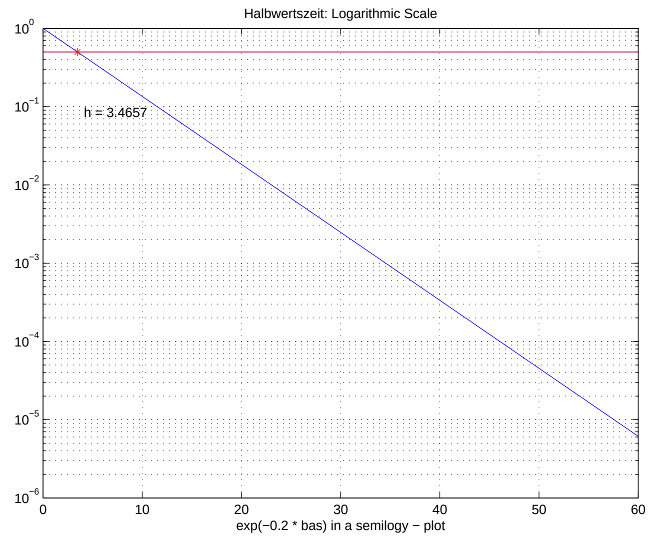


Abbildung 1: Die Exponentialfunktion Darstellung

1. (a) Man bestimme die folgenden (iterierten) Linear-Kombinationen der drei folgenden Funktionen: $h(t) = 4f_1(t) - 2f_2(t) + f_3(t)$, wobei $f_1(t) = 3\sin(2\pi t) + 2\cos(2\pi t)$, $f_2(t) = 2\sin(2\pi t) - \cos(2\pi t)$ und $f_3(t) = 5\cos(2\pi t)$ sei.
   (b) Gegeben zwei Spalten-Vektoren namens $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ in $\mathbb{R}^3$, und drei Linear-Kombinationen $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$, gegeben durch $\vec{c}_1 = 4\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2$, $\vec{c}_2 = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2$, $\vec{c}_3 = 5\vec{b}_2$. Man schreibe $\vec{d} := 4\vec{c}_1 - 2\vec{c}_2 + 2\vec{c}_3$

Die Matrix im Kurs von Gilbert Strang (MIT-Kurs) ist:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

und die rechte Seite der Gleichung beschreibt den Spalten-Vektor $\mathbf{b} = [0; 3]$ bzw. Punkt $P = (0, 3)$.

Diese (erweiterte) Systemmatrix beschreibt das System von zwei Gleichungen (2 Zeilen) in den *zwei* Variablen (die hier mit x bzw. y bezeichnet wurden):

$$\begin{gathered} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{gathered} \tag{10}$$

Natürlich ändert sich nichts an dem Gleichungssystem, wenn man die Reihenfolge der Gleichungen vertauscht (wir werden sehen, das dies das Rechnen erleichtert!);

$$\begin{gathered} -x + 2y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

Mit jeder Gleichung ist natürlich auch ihr Vielfaches eine (gleichwertige) Gleichung, d.h. z.B.

$$-\lambda x + 2\lambda y = 3\lambda$$

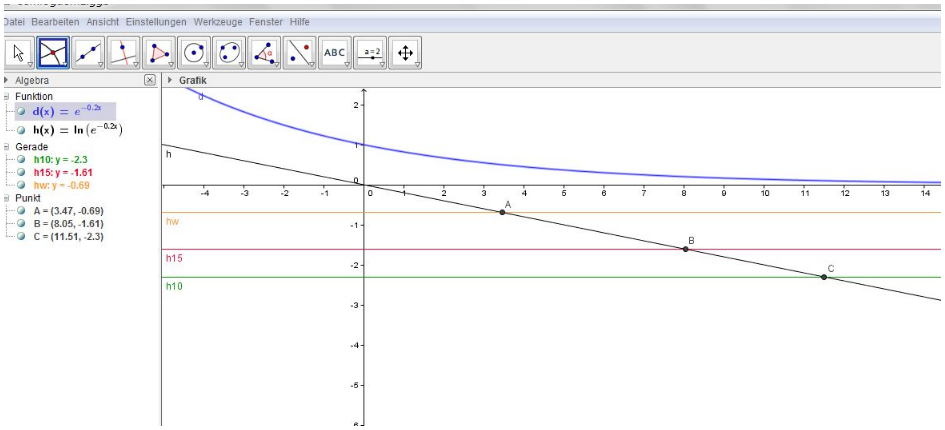


Abbildung 2: Eine GEOGEBRA Variante: Logarithmieren von Hand! A, B, C sind (Zeit)Punkte, zu denen Halbwert, 1/5 bzw. 1/10 erzielt werden.

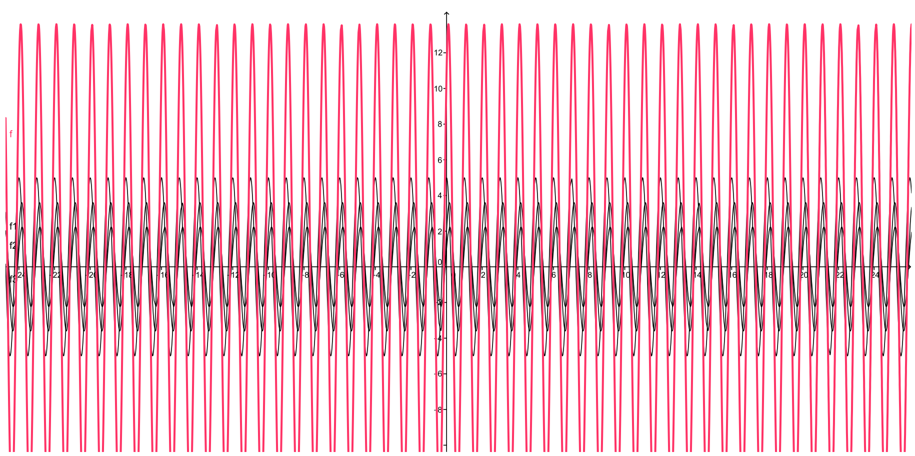


Abbildung 3: Lin.Komb von SINUS und COSINUS Fkt.

ist gleichwertig (falls $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$) zur ersten Gleichung. Ebenso ist klar, dass auch die Summe zweier gültiger Gleichungen wieder eine gültige Gleichung ist.

Hier ist es nun leicht zu sehen, dass man durch Addieren des doppelten der ersten Gleichung zur zweiten die Gleichung

$$(2 + 2 \cdot (-1))x + (-1 + 2(2))y = 0 - 2 \cdot 3 = 6$$

bekommt, oder $3y = 6$, bzw. $y = 2$ und letztendlich $x = 1$.

4.3 Rekombination von linear unabh. Vektoren

newbasis1 **Lemma 10.** *Es sei* $\mathbf{b}_1, \cdot, \mathbf{b}_r$ *eine Basis für einen* r*-dimensionalen Teilraum* $\boldsymbol{W} \subset \mathbb{K}^m$ *(z.B. Spaltenraum und Pivotspalten der Matrix* $\boldsymbol{A}$*). Weiters sei eine Familie* $\mathbf{v}_1, \cdot, \mathbf{v}_r$ *durch Linearkombinationen dieser Vektoren gebildet, d.h.* $\mathbb{H}$ *sei eine quadratische Matrix, und* $\mathbf{V} = \boldsymbol{B} * \mathbb{H}$.

Dann gilt: $\mathbf{V}$ *ist linear unabhängig genau dann wenn es eine Basis ist, und das ist genau dann der Fall wenn* $\mathbb{H}$ *eine invertierbare* $r \times r$*-Matrix ist.*

Proof. Wir nehmen einmal an, dass $\mathbb{H}$ invertierbar ist. Dann gilt $\mathbf{V} = \boldsymbol{B} * \mathbb{H}$, aber auch $\boldsymbol{B} = \mathbf{V} * \mathbb{H}^{-1}$, und somit sind die jeweiligen Enthaltensrelation für die linearen Erzeugnisse gleich. Weiters ist $\mathbf{V}$ eine linear unabhängige Menge, weil ja gilt: $\mathbf{V} * \mathbf{y} = \mathbf{0}$ impliziert $\boldsymbol{B} * (\mathbb{H} * \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, also muss wegen der linearen Unabhängigkeit der Spalten von $\boldsymbol{B}$ gelten $\mathbb{H} * \mathbf{y} = \mathbf{0}$, woraus dann folgt dass $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ gilt. Somit sind die Spalten von $\mathbf{V}$ eine Basis für $\boldsymbol{V}$.

Ist nun umgekehrt $\mathbf{V}$ eine linear unabhängige Menge von Erzeugern von $\boldsymbol{W}$. Um die Umkehrung zu zeigen, betrachten wir den Fall, dass die Matrix $\mathbb{H}$ nicht invertierbar wäre. Dann muss sie aber auch (weil ja quadratisch!) einen nicht-trivialen Kern haben, d.h. es gibt $\mathbf{0} = \neq \mathbf{y} \in \mathbb{K}^r$ mit $\mathbb{H} * \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Dann wäre aber auch $\mathbf{V} * \mathbf{y} = \boldsymbol{B} * (\mathbb{H} * \mathbf{y}) = \boldsymbol{B} * \mathbf{0} = \mathbf{0}$, im Widerspruch zur angenommenen linearen Unabhängigkeit der Familie $\mathbf{v}_1, \cdot, \mathbf{v}_r$.

□

BEMERKUNG: Bilder von linear abhängigen Familien sind selber wieder linear abhängig. Bilder von linear unabhängigen Mengen unter einer linearen Abbildung sind nur dann garantiert wieder linear unabhängig, wenn diese lineare Abbildung T einen nicht-trivialen Kern hat (d.h. injektiv ist).

In anderen Worten: Multipliziert man zwei Matrizen, deren Spalten jeweils linear unabhängig sind, miteinander, so erhält man eine linear unabhängige Produktmatrix (mit der Begründung: die Komposition zweier injektiver Abbildungen ist wieder injektiv! und weil der Komposition der Matrizen die Komposition von linearen Abbildungen entspricht!).

4.4 Kriterien für Invertierbarkeit

invertibility

Theorem 3. *Für eine lineare Abbildung* $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$*, identifiziert mit einer* $n \times n$*-Matrix* $\boldsymbol{A}$ *sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

1. T *ist bijektiv (die Matrix* $\boldsymbol{A}$ *hat eine inverse Matrix);*
2. T *ist injektiv (d.h. die Spalten von* $\boldsymbol{A}$ *sind lin.unabh.);*
3. T *ist surjektiv (d.h. die Spalten von* $\boldsymbol{A}$ *spannen* $\mathbb{K}^n$*);*
4. $\mathbf{Z} = \mathbf{I}_n$ *(die zugeörigen Zeilenstufenform).*

```
A = rand(4)
A =
    0.4218    0.6557    0.6787    0.6555
    0.9157    0.0357    0.7577    0.1712
    0.7922    0.8491    0.7431    0.7060
    0.9595    0.9340    0.3922    0.0318
A(:,3) = A(:,1) + A(:,2)
A =
    0.4218    0.6557    1.0775    0.6555
    0.9157    0.0357    0.9514    0.1712
    0.7922    0.8491    1.6413    0.7060
    0.9595    0.9340    1.8935    0.0318
RA = rref(A)
RA =
    1.0000         0    1.0000         0
         0    1.0000    1.0000         0
         0         0         0    1.0000
         0         0         0         0
rref([A; rref(A)])
ans =
    1.0000         0    1.0000         0
         0    1.0000    1.0000         0
         0         0         0    1.0000
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
rref([rref(A);A])
ans =
    1.0000         0    1.0000         0
         0    1.0000    1.0000         0
         0         0         0    1.0000
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
rref([A', rref(A)'])
ans =
  Columns 1 through 5
    1.0000         0         0   -5.3937   -1.1396
         0    1.0000         0   -1.0616    0.8878
         0         0    1.0000    5.3099    0.8427
         0         0         0         0         0
```

```
  Columns 6 through 8
   -4.8464    7.1072         0
   -2.1009    1.5305         0
    5.0086   -5.5529         0
         0         0         0
rref([rref(A)',A'])
ans =
  Columns 1 through 5
    1.0000         0         0         0    0.4218
         0    1.0000         0         0    0.6557
         0         0    1.0000         0    0.6555
         0         0         0         0         0
  Columns 6 through 8
    0.9157    0.7922    0.9595
    0.0357    0.8491    0.9340
    0.1712    0.7060    0.0318
         0         0         0

C  =  rand(4) * A;
rank(C)
ans =      3
rref(C)
ans =
    1.0000         0    1.0000         0
         0    1.0000    1.0000         0
         0         0         0    1.0000
         0         0         0         0
A' * null(A')
ans =
   1.0e-15 *
    0.0555
   -0.0833
         0
    0.1006
A * null(A)
ans =
   1.0e-15 *
    0.1656
    0.3473
    0.2808
    0.2247
rank(A')
ans =      3
rank(A)
ans =      3
```

[1,2]

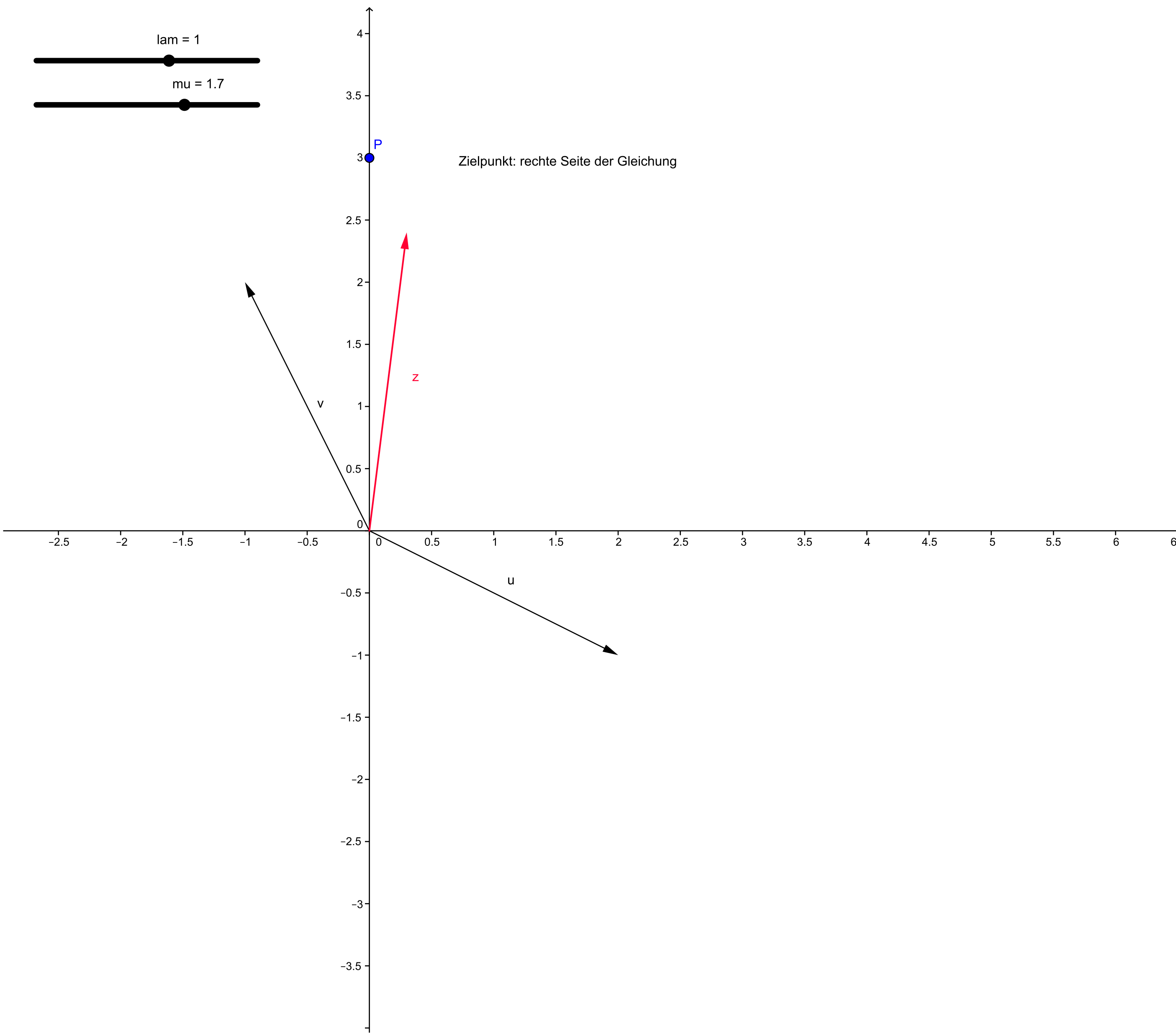
```
FACT CONCERNING RREF(A)
>> randperm(5)
ans =
     3     5     1     2     4
>> rp = randperm(5);
>> A = rand(5,3) * rand(3,5)
A =
    0.4821    0.5906    0.0746    0.5878    0.2074
    1.0629    0.7336    0.1493    0.4664    0.7098
    1.7388    1.3837    0.3233    1.4370    1.2029
    1.3228    1.1132    0.2780    1.3485    0.9389
    1.5857    1.1680    0.3225    1.3394    1.1889
>> rank(A)
ans =
     3
>> rref(A)
ans =
    1.0000         0         0   -1.2384    0.7710
         0    1.0000         0    1.3134   -0.4884
         0         0    1.0000    5.4849    1.6642
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
>> rref( A(rp,:))
ans =
    1.0000         0         0   -1.2384    0.7710
         0    1.0000         0    1.3134   -0.4884
         0         0    1.0000    5.4849    1.6642
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
>>
```

Literatur

frinsp03 [1] S. Friedberg, A. Insel, and L. Spence. *Linear Algebra Fourth Edition*. PHI, 2003.

frinsp00 [2] L. Spence, A. Insel, and S. Friedberg. *Elementary Linear Algebra: A Matrix Approach*. Prentice Hall, 2000.

st03-8 [3] G. Strang. *Lineare Algebra*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, 2003.


lam = 1
mu = 1.7
P
Zielpunkt: rechte Seite der Gleichung
z
v
u