1.2 Differenzierbare Strukturen

Ausgangspunkt sei ein hausdorffscher topologischer Raum X. Ist $U \subset X$ offen und $\varphi : U \to B$ ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$, so nennt man φ eine ***(n-dimensionale) lokale Karte*** oder ein ***lokales Koordinatensystem***. Ist $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Komponente, so nennt man die Funktionen $x_i := \mathrm{pr}_i \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ ***lokale Koordinaten*** auf U.

Der Raum X heißt ein ***n-dimensionaler lokal-euklidischer Raum***, falls er das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ und eine lokale Karte $\varphi : U \to B \subset \mathbb{R}^n$ gibt. X ist dann insbesondere lokal-kompakt und parakompakt.

Definition

Sei X ein n-dimensionaler lokal-euklidischer Raum. Zwei Karten $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ heißen ***$\mathscr{C}^k$-verträglich***, wenn $U \cap V = \varnothing$ ist oder die Abbildung

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

ein $\mathscr{C}^k$-Diffeomorphismus (also eine umkehrbare differenzierbare Abbildung mit ebenfalls differenzierbarer Umkehrabbildung) ist.

Die Abbildungen $\varphi \circ \psi^{-1}$ und $\psi \circ \varphi^{-1}$ nennt man ***Koordinatentransformationen***.

Definition

Ein System von Karten $\varphi_\iota : U_\iota \to \mathbb{R}^n$ (mit $\iota \in I$) heißt ein ***$\mathscr{C}^k$-Atlas*** für X, falls gilt:

1. $\displaystyle\bigcup_{\iota \in I} U_\iota = X$.
2. Alle Karten φ_ι sind untereinander $\mathscr{C}^k$-verträglich.

Ist $k = \infty$, so sprechen wir kurz von „differenzierbarer Verträglichkeit“ und einem „differenzierbaren Atlas“.

Bemerkung: Künftig behandeln wir nur den $\mathscr{C}^\infty$-Fall.

Zwei differenzierbare Atlanten für X heißen differenzierbar verträglich, falls jede Karte aus dem einen Atlas mit jder Karte aus dem anderen Atlas differenzierbar verträglich ist. In diesem Falle ist die Vereinigung der beiden Atlanten wieder ein differenzierbarer Atlas. Vereinigt man alle verträglichen Atlanten, so erhält man einen „maximalen Atlas“. Unter einer ***differenzierbaren Struktur*** auf X versteht man die Festlegung eines (maximalen) differenzierbaren Atlasses.

Definition
Eine ***n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit*** ist ein n-dimensionaler lokal-euklidischer Raum, versehen mit einer differenzierbaren Struktur.

1.2.1. Beispiele

A. Jede Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit beliebig oft differenzierbaren Parametrisierungen ist offensichtlich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein typisches Beispiel ist die n-Sphäre S^n.

B. Sei $X := \mathbb{R} \cup \{\,\mathsf{i}\,\}$, wobei $\mathsf{i} = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit bezeichnet. Man könnte auch irgend ein anderes Objekt benutzen, das nicht in $\mathbb{R}$ liegt. Eine ε-Umgebung um ein $x_0 \in \mathbb{R}$ soll einfach ein offenes Intervall der Gestalt $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ sein. Eine ε-Umgebung von i sei eine Menge der Gestalt $(-\varepsilon, 0) \cup \{\,\mathsf{i}\,\} \cup (0, \varepsilon)$. Das ergibt eine Topologie auf X. Dieser Raum ist kein Hausdorffraum, denn die Punkte 0 und i besitzen keine disjunkten Umgebungen. Obwohl jeder Punkt von X eine Umgebung besitzt, die zu einer offenen Menge in $\mathbb{R}$ homöomorph ist, ist X keine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

C. Sei $X := \mathbb{R} \times (0, 1)$. Eine ε-Umgebung eines Punktes $(x_0, t_0) \in X$ sei eine Menge der Gestalt $\{(x_0, t) \in X \,:\, |t - t_0| < \varepsilon\}$. Damit wird X zu einem topologischen Raum, der lokal-homöomorph zu $\mathbb{R}$ und ein Hausdorffraum ist. Er ist dann auch lokal-kompakt und erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, aber nicht das zweite. Also ist auch dieser Raum keine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

D. Wir kommen zu einem etwas komplizierteren Beispiel. Es sei $\mathbb{RP}^n$ die Menge aller 1-dimensionalen linearen Unterräume des $\mathbb{R}^{n+1}$. Ist $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ ein Punkt aus $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, so werde der von $\mathbf{x}$ erzeugte Raum mit $[\mathbf{x}]$ bezeichnet. So gewinnt man eine Abbildung $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{RP}^n$, deren Fasern die Geraden durch den Nullpunkt sind, aus denen der Nullpunkt herausgenommen wurde. Man nennt $\mathbb{RP}^n$ den n-dimensionalen ***(reell-)projektiven Raum*** und π die ***natürliche Projektion***.

Der Punkt $[\mathbf{x}]$ wird auch mit dem Symbol $(x_0 : \ldots : x_n)$ bezeichnet. Diese Bezeichnung ist nicht eindeutig, denn für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist

$$(\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n) = (x_0 : \ldots : x_n).$$

Die Zahlen $x_0, \ldots, x_n$ nennt man die ***homogenen Koordinaten*** des Punktes $(x_0 : \ldots : x_n)$.

Wir versehen jetzt den projektiven Raum mit einer Topologie. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{RP}^n$ soll „offen“ heißen, wenn ihr Urbild $\pi^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$

ist. Man erhält so die „Quotiententopologie", d.h. die „feinste" Topologie (mit anderen Worten: die Topologie mit den meisten offenen Mengen), für die π stetig wird. Dass so tatsächlich eine Topologie definiert wird, ergibt sich aus der Mengenlehre. Eine Abbildung $f : \mathbb{RP}^n \to Y$ in einen anderen topologischen Raum Y ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi$ stetig ist.

Für $i = 0, \ldots, n$ sei $U_i := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{RP}^n \,:\, x_i \neq 0\}$. Jeder Punkt des $\mathbb{RP}^n$ liegt in einer der Mengen U_i. Da $\pi^{-1}(U_i)$ offen ist, gilt das auch für U_i. Nun definiert man die Abbildung $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi_i(x_0 : \ldots : x_n) := \Big(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\Big).$$

Sie ist offensichtlich wohldefiniert, und sie ist bijektiv, mit

$$\varphi_i^{-1}(u_1, \ldots, u_n) = (u_1 : \ldots : u_i : 1 : u_{i+1} : \ldots : u_n).$$

Da $\varphi_i \circ \pi$ stetig ist, ist auch φ_i stetig. Die Stetigkeit der Umkehrabbildung ist etwas komplizierter zu zeigen: Sei $\alpha_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ definiert durch

$$\alpha_i(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_i, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Dann ist $\pi \circ \alpha_i = \varphi_i^{-1}$ als Verknüpfung stetiger Abbildungen wieder stetig.

Die Abbildungen φ_i sind also Homöomorphismen. Wir müssen noch zeigen, dass $\mathbb{RP}^n$ ein Hausdorffraum ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Gegeben seien zwei Punkte $x = (x_0 : \ldots : x_n)$ und $y = (y_0 : \ldots : y_n)$ mit $x \neq y$. Liegen beide Punkte in der gleichen Menge U_i, so ist klar, dass sie disjunkte Umgebungen besitzen (weil das ja im $\mathbb{R}^n$ gilt). Liegen die Punkte nicht in der gleichen Umgebung, so muss $x_i y_i = 0$ für $i = 0, \ldots, n$ gelten. O.B.d.A. sei $x = (1 : x_1 : \ldots : x_s : 0 : \ldots : 0)$ und $y = (0 : \ldots : 0 : y_{s+1} : \ldots : y_{n-1} : 1)$. Dann sind

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{(1 : w_1 : \ldots : w_n) \,:\, |w_n| < 1\} \\ \text{und} \quad V_2 &:= \{(w_0 : \ldots : w_{n-1} : 1) \,:\, |w_0| < 1\} \end{aligned}$$

offene Umgebungen von x bzw. y. Sie sind disjunkt, was man wie folgt sehen kann: Ist $[\mathbf{w}] \in V_1$ und $w_n = 0$, so liegt $[\mathbf{w}]$ nicht in V_2. Ist dagegen $w_n \neq 0$, so ist $[\mathbf{w}] = (1/w_n : w_1/w_n : \ldots : w_{n-1}/w_n : 1)$ und $|1/w_n| = 1/|w_n| > 1$, also auch in diesem Fall $[\mathbf{w}] \notin V_2$.

Da π die kompakte Sphäre stetig und surjektiv auf den projektiven Raum abbildet, erweist sich auch dieser als kompakt. Dann ist insbesondere klar, dass das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist (in jeder der endlich vielen Koordinatenbereiche U_i gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge).

Weiter ist

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(u_1, \dots, u_n) = \Big(\frac{u_1}{u_{i+1}}, \dots, \frac{\widehat{u_{i+1}}}{u_{i+1}}, \dots, \frac{u_j}{u_{i+1}}, \frac{1}{u_{i+1}}, \frac{u_{j+1}}{u_{i+1}}, \dots, \frac{u_n}{u_{i+1}} \Big)$$

(für $i < j$), und das ist eine differenzierbare Abbildung auf

$$\varphi_j(U_i \cap U_j) = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, u_{i+1} \neq 0\} \quad \text{(für } i < j\text{)}.$$

Also ist $\mathbb{RP}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

1.2.2. Satz

Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Ist $0 < r < R$, so gibt es eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ von $\mathcal{U}$, so dass gilt:

1. *Zu jedem $j \in J$ gibt es ein Koordinatensystem (V_j, φ_j) für X mit $\varphi_j(V_j) = B_R(\mathbf{0})$.*
2. *Die Mengen $V'_j := \varphi_j^{-1}(B_r(\mathbf{0}))$ überdecken X.*

BEWEIS: Es gibt eine Folge von kompakten Mengen K_ν, die X ausschöpft.

Wir setzen $M_1 := K_1$ und $M_\nu := K_\nu \setminus K^\circ_{\nu-1}$ für $\nu \geq 2$. Dann ist (M_ν) eine abzählbare Überdeckung von X durch kompakte Mengen.

Sei $M = M_\nu$ für ein festes ν. Zu jedem $x \in M$ gibt es einen Index $i = i(x) \in I$ und eine offene Umgebung $V = V(x) \subset U_i \cap (K^\circ_{\nu+1} \setminus K_{\nu-2})$. Dabei kann V so klein gewählt werden, dass es ein Koordinatensystem $\varphi : V \to B_R(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$ gibt. Sei $V' := \varphi^{-1}(B_r(\mathbf{0}))$. Endlich viele solcher Umgebungen V' überdecken bereits M. Führen wir das Verfahren für alle M_ν durch, so erhalten wir eine abzählbare Verfeinerung $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}$. Nach Konstruktion ist $\mathcal{V}$ lokal-endlich. ∎

Definition

Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $M \subset X$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt ***differenzierbar***, falls $f \circ \varphi_\iota^{-1} : \varphi_\iota(M \cap U_\iota) \to \mathbb{R}$ für jede Karte (U_ι, φ_ι) eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion ist.

Die Menge aller differenzierbaren Funktionen auf M sei mit $\mathscr{C}^\infty(M)$ bezeichnet. Ist $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, so nennt man die Menge

$$\mathrm{Tr}(f) := \overline{\{x \in M \,:\, f(x) \neq 0\}}$$

den ***Träger*** von f. Mit $\mathscr{C}^\infty_c(M)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ mit kompaktem Träger.

1.2.3. Satz vom Hut

Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < R$. *Dann gibt es eine* $\mathcal{C}^\infty$*-Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *so dass gilt:*

$$f(\mathbf{x}) \equiv 1 \text{ auf } B_r(\mathbf{a}) \quad \text{und} \quad f(\mathbf{x}) \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \setminus B_R(\mathbf{a}),$$

sowie $0 \le f(\mathbf{x}) \le 1$ *überall sonst.*

BEWEIS: Durch

$$g(t) := \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \le 0 \end{cases}$$

wird eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert, die genau für $x > 0$ Werte > 0 annimmt. Dann ist $h(t) := g(1+t)g(1-t)$ genau auf dem Intervall $(-1, 1)$ positiv und überall sonst $= 0$.

Die Funktion

$$\varphi(t) := \Big(\int_{-1}^{t} h(\tau)\,d\tau\Big) \Big/ \Big(\int_{-1}^{1} h(\tau)\,d\tau\Big)$$

ist wieder eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion, die nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Für $t \le -1$ ist $\varphi(t) \equiv 0$ und für $t \ge 1$ ist $\varphi(t) \equiv 1$. Schließlich setzen wir

$$f(\mathbf{x}) := \varphi\Big(\frac{R + r - 2\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}{R - r}\Big).$$

Diese Funktion nimmt auch nur Werte zwischen 0 und 1 an. Für $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \ge R$ ist $f(\mathbf{x}) \equiv 0$, und für $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \le r$ ist $f(\mathbf{x}) \equiv 1$. ■

Definition

Eine ***Teilung der Eins*** auf X ist eine Familie $(f_\iota)_{\iota \in I}$ von differenzierbare Funktionen auf X, so dass gilt:

1. $f_\iota \ge 0$ überall.
2. Das System der Träger $\operatorname{Tr}(f_\iota)$ ist lokal-endlich.
3. $\sum_{\iota \in I} f_\iota = 1$.

1.2.4. Satz

Zu jeder offenen Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\iota)_{\iota \in I}$ *von* X *gibt es eine Teilung der Eins* $(f_\iota)_{\iota \in I}$ *mit* $\operatorname{Tr}(f_\iota) \subset U_\iota$.

BEWEIS: Sei $\mathscr{V} = (V_\lambda)_{\lambda \in L}$ eine lokal-endliche Verfeinerung von $\mathscr{U}$, so dass es lokale Koordinaten $\varphi_\lambda : V_\lambda \to B_R(\mathbf{0})$ gibt und für ein r mit $0 < r < R$ auch noch die Mengen $V'_\lambda := \varphi_\lambda^{-1}(B_r(\mathbf{0}))$ überdecken.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion, so dass überall $0 \le f(\mathbf{x}) \le 1$ ist, sowie $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf $B_r(\mathbf{0})$ und $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_R(\mathbf{0})$. Dann setzen wir

$$g_\lambda(x) := \begin{cases} f \circ \varphi_\lambda(x) & \text{für } x \in V_\lambda, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\tau : L \to I$ eine Verfeinerungsabbildung, also $V_\lambda \subset U_{\tau(\lambda)}$. Dann ist $\mathscr{W} = (W_\iota)_{\iota \in I}$ mit $W_\iota := \bigcup_{\lambda \in \tau^{-1}(\iota)} V_\lambda$ eine offene Verfeinerung von $\mathscr{U}$ mit $W_\iota \subset U_\iota$. Außerdem ist $\mathscr{W}$ lokal-endlich, denn zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $P = P(x)$ und eine endliche Teilmenge $L_0 \subset L$, so dass $P \cap V_\lambda \neq \varnothing$ nur für $\lambda \in L_0$ gilt. Aber dann ist $P \cap W_\iota \neq \varnothing$ höchstens für $\iota = \tau(\lambda)$, $\lambda \in L_0$, und das sind auch nur endlich viele.

Sei $\widetilde{g}_\iota := \sum_{\lambda \in \tau^{-1}(\iota)} g_\lambda$. Diese Summe ist überall endlich. Deshalb ist $\widetilde{g}_\iota$ differenzierbar, und außerdem ist $\mathrm{Tr}(\widetilde{g}_\iota) \subset W_\iota$. Da jeder Punkt $x \in X$ in einer Menge V'_λ enthalten ist, gibt es zu x mindestens ein ι mit $\widetilde{g}_\iota(x) > 0$. Also ist $g := \sum_\iota \widetilde{g}_\iota$ eine überall positive differenzierbare Funktion. Schließlich setzen wir

$$f_\iota := \frac{\widetilde{g}_\iota}{g}.$$

Offensichtlich besitzen die f_ι alle gewünschten Eigenschaften. ∎

1.2.5. Folgerung

Sei $U \subset X$ offen und $V \subset\subset U$ ebenfalls offen. Dann gibt es eine differenzierbare Funktion f auf X mit $f|_V = 0$ und $f|_{(X \setminus U)} = 1$.

Beweis: Sei (f_1, f_2) eine Teilung der Eins zur Überdeckung $(U, X \setminus \overline{V})$. Dann ist $\mathrm{Tr}(f_1) \subset U$, $\mathrm{Tr}(f_2) \subset X \setminus \overline{V}$ und $f_1 + f_2 = 1$. Wir nehmen f_2 als Funktion f. ∎

Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition

Eine ***Derivation*** auf X in p ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $D : \mathscr{C}^\infty(X) \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$D(f \cdot g) = D(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot D(g).$$

Bemerkung: Da $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) = 2D(1)$ ist, folgt $D(1) = 0$. Wegen der Linearität ist dann $D(c) = D(c \cdot 1) = c \cdot D(1) = c \cdot 0 = 0$ für jede konstante Funktion c.

1.2.6. Lemma

Sei $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$, $U = U(p) \subset X$ eine offene Umgebung und $f|_U = 0$. Dann ist $D(f) = 0$ für jede Derivation D in p.

Beweis: Sei $V = V(p) \subset\subset U$ eine offene Umgebung. Zu der offenen Überdeckung $\{X \setminus \overline{V}, U\}$ von X gibt es eine passende Teilung der Eins $\{\varphi, \psi\}$. Es ist $\varphi|_{\overline{V}} = 0$ und $\varphi|_{X\setminus U} = 1 - \psi|_{X\setminus U} = 1$, also

$$\varphi \cdot f = \begin{cases} 1 \cdot f = f & \text{in } X \setminus U, \\ \varphi \cdot 0 = 0 = f & \text{in } U. \end{cases}$$

Damit ist

$$D(f) = D(\varphi \cdot f) = \varphi(p) \cdot D(f) + D(\varphi) \cdot f(p) = 0$$

und alles gezeigt. ∎

Die Werte $D(f)$ einer Derivation in a auf den Funktionen $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$ hängen also nur vom Verhalten von f in der Nähe des Punktes a ab.

1.2.7. Beispiel

Ist (U, φ) eine Karte für X und $a \in U$, so kann man die Tangentialvektoren D_ν (oder $\partial/\partial x_\nu$) in a definieren durch

$$D_\nu(f) = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(f) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\varphi(a)), \text{ für } \nu = 1, \ldots, n.$$

Diese partiellen Ableitungen hängen natürlich von der Karte φ ab, deshalb schreiben wir gelegentlich auch $D_\nu^{(\varphi)}$ statt D_ν.

Für die lokalen Koordinaten $x_\mu = \mathrm{pr}_\mu \circ \varphi$ gilt dann:

$$D_\nu(x_\mu) = \delta_{\nu\mu}, \text{ für } \nu, \mu = 1, \ldots, n.$$

Die Derivationen in a bilden einen Vektorraum $T_a(X)$, den wir den ***Tangentialraum*** von X in a nennen.

1.2.8. Lemma

Sei f eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion auf einer Umgebung U des Nullpunktes im $\mathbb{R}^n$ mit $f(\mathbf{0}) = 0$. Dann gibt es $\mathscr{C}^\infty$-Funktionen g_ν auf U, so dass gilt:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(\mathbf{x}) \cdot x_\nu, \text{ mit } g_\nu(\mathbf{0}) = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{0}) \text{ für } \nu = 1, \ldots, n.$$

Beweis: Sei $g_\nu(\mathbf{x}) := \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x})\, dt$, für $\nu = 1, \ldots, n$ und $\mathbf{x}$ nahe $\mathbf{0}$.

Nun sei ein $\mathbf{x}$ festgehalten und $g(t) := f(t\mathbf{x})$. Dann ist

$$f(\mathbf{x}) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,dt = \int_0^1 \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x})x_\nu\,dt = \sum_{\nu=1}^n g_\nu(\mathbf{x}) \cdot x_\nu.$$

■

1.2.9. Satz

Die partiellen Ableitungen $D_1, \ldots, D_n$ bilden eine Basis des Tangentialraumes $T_a(X)$. Insbesondere ist $\dim(T_a(X)) = n$.

Beweis: Sei φ eine Karte mit $\varphi(a) = \mathbf{0}$. Ist $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$, so ist

$$f \circ \varphi^{-1}(\mathbf{x}) = f \circ \varphi^{-1}(\mathbf{0}) + \sum_{\nu=1}^n g_\nu(\mathbf{x}) \cdot x_\nu,$$

mit $g_\nu(\mathbf{0}) = \partial(f \circ \varphi^{-1})/\partial x_\nu(\mathbf{0})$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Sei $h_\nu := g_\nu \circ \varphi$. Dann ist

$$f(x) = f(a) + \sum_{\nu=1}^n h_\nu(x) \cdot x_\nu,$$

wobei jetzt die lokalen Koordinaten mit x_ν bezeichnet werden und

$$h_\nu(a) = g_\nu(\mathbf{0}) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\mathbf{0}) = D_\nu(f)$$

ist. Dann folgt: Ist $D \in T_a(X)$, so ist

$$D(f) = D(f(a)) + \sum_{\nu=1}^n \big[h_\nu(a) \cdot D(x_\nu) + D(h_\nu) \cdot x_\nu(a)\big] = \sum_{\nu=1}^n D_\nu(f) \cdot D(x_\nu).$$

Weil das für jedes f gilt, ist $D = \sum_\nu c_\nu D_\nu$, mit $c_\nu := D(x_\nu)$. Das zeigt, dass die partiellen Ableitungen D_ν ein Erzeugendensystem des Tangentialraums bilden.

Ist umgekehrt $D = \sum_\nu c_\nu D_\nu = 0$, so ist $0 = D(x_\mu) = \sum_\nu c_\nu D_\nu(x_\mu) = c_\mu$ für $\mu = 1, \ldots, n$. ■

1.2.10. Beispiel

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{a} \in B$. Dann sei $\theta_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to T_{\mathbf{a}}(B)$ definiert durch

$$\theta_{\mathbf{a}}\mathbf{v}(f) := D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = \sum_{\nu=1}^n v_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{a}).$$

Dies ist eine lineare Abbildung. Ist $\theta_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = 0$, so ist

$$0 = \theta_{\mathbf{a}}\mathbf{v}(x_\mu) = v_\mu \text{ für alle } \mu.$$

Das bedeutet, daß $\theta_{\mathbf{a}}$ injektiv, aus Dimensionsgründen also sogar bijektiv ist. So kann man den Tangentialraum von B in $\mathbf{a}$ mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren.

Es gibt noch zwei andere, äquivalente Beschreibungen von Tangentialvektoren:

1) Äquivalenzklassen von Kurven als Tangentialvektoren:

Betrachtet werden differenzierbare Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ mit $\alpha(0) = a$. Zwei solche Kurven α und β heißen äquivalent (in a), falls gilt:

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0) \text{ für alle differenzierbaren Funktionen } f.$$

Eine Äquivalenzklasse $[\alpha]$ von Kurven definiert eine Derivation D durch

$$D(f) := (f \circ \alpha)'(0).$$

Ist umgekehrt D eine Derivation in a und φ eine Karte in a mit zugehörigen lokalen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$, so kann man $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ wie folgt definieren:

$$\alpha(t) := \varphi^{-1}\bigl(\varphi(a) + t(D(x_1), \ldots, D(x_n))\bigr).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)'(0) &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\varphi(a)) \cdot D(x_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} D(x_\nu) D_\nu(f) \;=\; D(f).\end{aligned}$$

2) Äquivalenzklassen von Vektoren mit Transformationsverhalten:

Betrachtet werden Paare $(\mathbf{v}, \varphi)$, wobei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und φ eine Karte in a ist. Zwei Paare $(\mathbf{v}, \varphi)$ und $(\mathbf{w}, \psi)$ heißen äquivalent, falls gilt:

$$\mathbf{v}^\top = J_{\varphi \circ \psi^{-1}}(\psi(a)) \cdot \mathbf{w}^\top.$$

Es ist klar, dass das eine Äquivalenzrelation ist. Die Vektorraum-Struktur des $\mathbb{R}^n$ überträgt sich auf die Menge der Äquivalenzklassen $[\mathbf{v}, \varphi]$.

Ist ein Paar $(\mathbf{v}, \varphi)$ mit $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ gegeben, so kann man eine Derivation D in a definieren durch $D := \sum_\nu v_\nu D_\nu$. Ist $(\mathbf{w}, \psi)$ äquivalent zu $(\mathbf{v}, \varphi)$, so ist

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\varphi(a)) &= \sum_{\nu=1}^{n} \Bigl(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial(\varphi \circ \psi^{-1})_\nu}{\partial y_\mu}(\psi(a)) w_\mu\Bigr) \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\varphi(a)) \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} w_\mu \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial y_\mu}(\psi(a)).\end{aligned}$$

Also ist die Definition von D unabhängig vom Repräsentanten.

Ist eine Derivation D gegeben, so setzt man $\mathbf{v} := (D(x_1), \ldots, D(x_n))$. Dieser Vektor hängt von den gewählten Koordinaten ab. Wechselt man die Koordinaten, so transformiert sich der Vektor wie oben.

1.3 Differenzierbare Abbildungen

Definition

Es seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine stetige Abbildung $\Phi : X \to Y$ heißt eine ***differenzierbare Abbildung***, falls gilt: Für jede offene Menge $V \subset Y$ und jede differenzierbare Funktion $g : V \to \mathbb{R}$ ist auch $g \circ \Phi : \Phi^{-1}(V) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

Ist $\Phi : X \to Y$ ein Homöomorphismus und sind Φ und Φ^{-1} differenzierbare Abbildungen, so nennt man Φ einen ***Diffeomorphismus***.

1.3.1. Satz

Eine stetige Abbildung $\Phi : X \to Y$ ist genau dann differenzierbar, wenn für jede Karte (U, φ) von X und jede Karte (V, ψ) von Y mit $\Phi(U) \cap V \neq \varnothing$ gilt:

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \Phi^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

ist eine differenzierbare Abbildung.

Beweis: 1) Sei Φ eine differenzierbare Abbildung, $\psi = (y_1, \ldots, y_m)$. Da die y_μ differenzierbare Funktionen auf V sind, ist $y_\mu \circ \Phi$ differenzierbar auf $\Phi^{-1}(V)$, also $y_\mu \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar auf $\varphi(U \cap \Phi^{-1}(V)$.

2) Nun sei das Kriterium erfüllt. Ist g eine differenzierbare Funktion auf Y, so ist $g \circ \psi^{-1}$ differenzierbar, also auch

$$(g \circ \Phi) \circ \varphi^{-1} = (g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}).$$

Das bedeutet, dass auch $g \circ \Phi$ eine differenzierbare Funktion ist. ∎

Eine ***Kategorie*** $\mathscr{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten $A, B, C, \ldots$ und aus einer Klasse von paarweise disjunkten Mengen $\mathrm{Hom}(A, B)$, so dass jedem geordneten Paar (A, B) von Objekten genau eine solche (eventuell leere) Menge zugeordnet ist. Die Elemente von $\mathrm{Hom}(A, B)$ heißen ***Morphismen*** von A nach B.

Zu jedem Tripel (A, B, C) von Objekten gibt es eine Abbildung $\mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$ mit $(g, f) \mapsto g \circ f$, so dass $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ ist. Zu jedem Objekt A gibt es einen ***identischen Morphismus*** $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$, so dass $\mathrm{id}_A \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_A = g$ ist.

Beispiele sind etwa

- die Kategorie der Gruppen und Gruppenhomomorphismen
- die Kategorie der Vektorräume und linearen Abbildungen

- die Kategorie der toplogischen Räume und stetigen Abbildungen
- die Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und differenzierbaren Abbildungen.

  Hier sieht man, dass die Menge $\mathscr{C}^\infty(X)$ der differenzierbaren Funktionen auf X ein Bestandteil der Mannigfaltigkeit ist. Das **Objekt** „Mannigfaltigkeit" besteht aus der Menge X und der differenzierbaren Struktur auf X.

1.3.2. Beispiele

A. Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\widetilde{X}$ ein Hausdorff-Raum und $\pi : \widetilde{X} \to X$ eine stetige Abbildung. Man nennt π ***lokal-topologisch***, falls es zu jedem Punkt $p_0 \in \widetilde{X}$ eine offene Umgebung U von p_0 in $\widetilde{X}$ und eine offene Umgebung V von $x_0 = \pi(p_0)$ in X gibt, so dass $\pi|_U : U \to V$ ein Homöomorphismus (also eine „topologische" Abbildung) ist.

Man kann nun $\widetilde{X}$ so mit einer differenzierbaren Struktur versehen, daß π zu einer differenzierbaren Abbildung wird. Ist nämlich $\pi : U \to V$ topologisch und $\varphi : V \to B \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte, so kann man $\psi := \varphi \circ \pi$ als Karte für $\widetilde{X}$ nehmen. Sind $\psi_1 = \varphi_1 \circ \pi : U_1 \to \mathbb{R}^n$ und $\psi_2 = \varphi_2 \circ \pi : U_2 \to \mathbb{R}^n$ zwei Karten mit $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, so gilt für $\mathbf{x} \in \varphi_2 \circ \pi(U_1 \cap U_2)$

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1} = (\varphi_1 \circ \pi|_{U_1}) \circ (\varphi_2 \circ \pi|_{U_2})^{-1} = \varphi_1 \circ \pi|_{U_1} \circ (\pi|_{U_2})^{-1} \circ \varphi_2^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}.$$

Das zeigt, dass die Karten differenzierbar miteinander verträglich sind. Man beachte allerdings, dass $\widetilde{X}$ nicht automatisch parakompakt ist.

Ist f eine differenzierbare Funktion auf X und $\psi = \varphi \circ \pi$ eine Karte für $\widetilde{X}$, so ist auch $(f \circ \pi) \circ \psi^{-1} = f \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar. Also ist π eine differenzierbare Abbildung.

B. Sind X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten (mit den Dimensionen n und m), so ist $X \times Y$ ein topologischer Raum. Man versieht $X \times Y$ mit der „Produkttopologie", die folgendermaßen aussieht: Ist $U \subset X \times Y$, so nennt man einen Punkt $(x_0, y_0) \in U$ einen inneren Punkt, falls es Umgebungen $V = V(x_0) \subset X$ und $W = W(y_0) \subset Y$ gibt, so dass $V \times W \subset U$ ist. Mit der so eingeführten Topologie ist $X \times Y$ ein Hausdorrfraum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Und $X \times Y$ kann leicht zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit gemacht werden. Ist (U, φ) eine Karte für X und (V, ψ) eine Karte für Y, so ist $(U \times V, \varphi \times \psi)$ eine Karte für $X \times Y$ (mit $(\varphi \times \psi)(x, y) := (\varphi(x), \psi(y)) \in \mathbb{R}^{n+m}$). Die differenzierbare Verträglichkeit solcher Karten rechnet man leicht nach.

Die kanonischen Projektionen $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ und $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$ sind dann differenzierbare Abbildungen.

Bemerkung: Eine $\mathbb{R}$-***Algebra*** ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum A mit einer zusätzlichen assoziativen Multiplikation, so dass die Distributivgesetze gelten und $r(f \cdot g) = (rf) \cdot g = f \cdot (rg)$ für $r \in \mathbb{R}$ und $f, g \in A$ ist.

Ist $U \subset X$ offen, so ist $\mathscr{C}^\infty(U)$ eine kommutative $\mathbb{R}$-Algebra.

Definition

Ist $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und $a \in X$, so wird die ***(induzierte) Tangentialabbildung*** $\Phi_{*,a} : T_a(X) \to T_{\Phi(a)}(Y)$ definiert durch

$$\Phi_{*,a}D(g) := D(g \circ \Phi).$$

Offensichtlich ist $\Phi_{*,a}$ linear, und es gilt:

1. $(\mathrm{id}_X)_{*,a} = \mathrm{id}_{T_a(X)}$.
2. Ist $\Psi : Y \to Z$ differenzierbar, so ist $(\Psi \circ \Phi)_{*,a} = \Psi_{*,\Phi(a)} \circ \Phi_{*,a}$.

Die Beweise sind trivial.

1.3.3. Satz

Ist (U, φ) eine Karte für X und (V, ψ) eine Karte für Y, so wird $\Phi_{*,a}$ bezüglich der von den Karten induzierten Basen durch die Matrix $J_{\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}}(\varphi(a))$ beschrieben.

Beweis: Sei $D_\nu(f) = \partial(f\circ\varphi^{-1})/\partial x_\nu(\varphi(a))$ und $\widetilde{D}_\mu(g) = \partial(g\circ\psi^{-1})/\partial y_\mu(\psi(\Phi(a)))$. Dann ist $\Phi_{*,a}D_\nu = \sum_{\mu=1}^m a_{\nu\mu}\widetilde{D}_\mu$, mit

$$a_{\nu\mu} = (\Phi_{*,a}D_\nu)(y_\mu) = D_\nu(y_\mu \circ \Phi) = \frac{\partial(y_\mu \circ \psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\varphi(a)).$$

∎

Seien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ zwei Kategorien. Ein ***kovarianter Funktor*** $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ordnet jedem Objekt A von $\mathscr{C}$ ein Objekt $F(A)$ von $\mathscr{D}$ zu, und jedem Morphismus $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ einen Morphismus $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ zu, so dass gilt:

1. $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$.
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Ein ***kontravarianter Funktor*** ordnet jedem Morphismus $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ einen Morphismus $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(B), F(A))$ zu, so dass $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ ist.

Sei etwa $\mathscr{C}$ die Kategorie, deren Objekte Paare (X, x_0) mit einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und einem Punkt $x_0 \in X$ sind.

Die Morphismen zwischen (X, x_0) und (Y, y_0) sind die differenzierbaren Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Wir haben nun einen kovarianten Funktor F von $\mathscr{C}$ in die Kategorie $\mathscr{D}$ der Vektorräume, den „Tangential-Funktor“:

$$F(X, x_0) := T_{x_0}X \quad \text{und} \quad F(f) := f_{*,x_0}.$$

Wenn klar ist, um welchen Punkt es geht, lassen wir den manchmal auch weg: $\Phi_* = \Phi_{*,a}$.

Ist ein Tangentialvektor als Äquivalenzklasse $[\alpha]$ (von Kurven) gegeben, so ist

$$\Phi_*([\alpha]) = [\Phi \circ \alpha],$$

denn es ist $\Phi_*[\alpha](f) = [\alpha](f \circ \Phi) = \dfrac{d}{dt}\Big|_0 (f \circ \Phi \circ \alpha) = [\Phi \circ \alpha](f)$.

Ist $[\alpha] = \sum_\nu a_\nu \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$ (bezüglich einer Karte $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\alpha_\nu := x_\nu \circ \alpha$, so ist $a_\nu = [\alpha](x_\nu) = \alpha_\nu'(0)$. Deshalb schreiben wir auch $\overset{\bullet}{\alpha}(0) := [\alpha] = \alpha_*(\dfrac{\partial}{\partial t})$.

Viele Sätze aus dem $\mathbb{R}^n$ lassen sich auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Dazu definieren wir noch:

$$\mathrm{rg}_a(\Phi) := \mathrm{rg}(\Phi_{*,a}).$$

Der Rang ist unabhängig von den Koordinaten.

1.3.4. Satz (über inverse Abbildungen)

Ist $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und $\det(\Phi_{*,a}) \neq 0$, also $\Phi_{*,a} : T_a(X) \to T_{\Phi(a)}(Y)$ ein Isomorphismus, so gibt es offene Umgebungen $U = U(a) \subset X$ und $V = V(\Phi(a)) \subset Y$, so dass $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

Der Beweis kann aus dem $\mathbb{R}^n$ übernommen werden.

1.3.5. Satz (vom Rang)

Sei $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$, $a \in X$ und $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung. Ist $r = \mathrm{rg}_x(\Phi)$ auf einer Umgebung $W = W(a) \subset X$ unabhängig von $x \in W$, so gibt es Koordinatensysteme (U, φ) um a und (V, ψ) um $\Phi(a)$, so dass auf U gilt:

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0).$$

Beweis: Wir können annehmen, dass $W = W(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umebung des Nullpunktes und $\Phi : W \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung mit konstantem

Rang r ist. Außerdem können wir annehmen, dass $J_\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A(\mathbf{x}) & * \\ * & * \end{pmatrix}$ ist, mit $A(\mathbf{x}) \in M_{r,r}(\mathbb{R})$ und $\det A(\mathbf{x}) \neq 0$ für jedes $\mathbf{x} \in W$ ist. Dann sei

$$F(\mathbf{x}) := (\Phi_1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_r(\mathbf{x}), x_{r+1}, \dots, x_n).$$

Weil $J_F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A(\mathbf{x}) & * \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}$ regulär ist, ist F ein lokaler Diffeomorphismus. Es gibt differenzierbare Funktionen $\psi_{r+1}, \dots, \psi_m$, so dass gilt:

$$\Phi \circ F^{-1}(\mathbf{z}) = (z_1, \dots, z_r, \psi_{r+1}(\mathbf{z}), \dots, \psi_m(\mathbf{z})),$$

also

$$J_\Phi(\mathbf{x}) \cdot J_F(\mathbf{z})^{-1} = J_{\Phi\circ F^{-1}}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ * & J''_\psi(\mathbf{z}) \end{pmatrix}.$$

Weil $\operatorname{rg} J_\Phi = r$ konstant ist, hat auch die rechte Matrix den Rang r, und $J''_\psi(\mathbf{z})$ muss verschwinden. Das bedeutet, dass die ψ_ϱ nur von $z_1, \dots, z_r$ abhängen.

Sei $G(y_1, \dots, y_m) :=$

$$= (y_1, \dots, y_r, y_{r+1} - \psi_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, y_m - \psi_m(y_1, \dots, y_r)).$$

Dann ist $J_G(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ * & E_{m-r} \end{pmatrix}$, also G ein lokaler Diffeomorphismus. Und nun ist

$$G \circ \Phi \circ F^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0).$$

Damit folgt die Behauptung des Satzes. ∎

Definition

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt ***(p-dimensionale) Untermannigfaltigkeit*** von X, wenn es zu jedem $a \in Y$ eine Karte (U, φ) für X in a gibt, so dass gilt:

$$U \cap Y = \varphi^{-1}\big(\{\mathbf{x} \in \varphi(U) \,:\, x_{p+1} = \ldots = x_n = 0\}\big).$$

Eine Untermannigfaltikeit ist selbst wieder eine Mannigfaltigkeit: Wählt man (U, φ) wie in der Definition, so ist $U \cap Y$ offen in Y, und $\widetilde{\varphi} : U \cap Y \to \mathbb{R}^p$ mit

$$\widetilde{\varphi}(x) := \big(\mathrm{pr}_1 \circ \varphi(x), \dots, \mathrm{pr}_p \circ \varphi(x)\big)$$

ist eine Karte für Y. Die weiteren Details rechnet man leicht nach.

Ist $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $i : Y \to X$ die Inklusionsabbildung. Dann ist $\varphi \circ i(x) = (\widetilde{\varphi}(x), \mathbf{0})$ für $x \in Y \cap U$. Ist $\mathbf{y} := \widetilde{\varphi}(x)$, so ist $\varphi \circ i \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{y}) = \varphi \circ i(x) = (\mathbf{y}, \mathbf{0})$, also

$$f|_{Y\cap U} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{y}) = f \circ i \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{y}) = f \circ \varphi^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{0}).$$

Das zeigt, dass $f|_{Y\cap U}$ auf der Untermannigfaltigkeit differenzierbar ist. Und i ist eine differenzierbare Abbildung. Die von i induzierte Abbildung $i_* : T_x(Y) \to T_x(X)$ ist gegeben durch $(i_*D)(f) := D(f|_Y)$.

Sei umgekehrt f eine differenzierbare Funktion auf der Untermannigfaltigkeit Y, $x \in Y$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte für X in x, die im obigen Sinne eine Karte $\widetilde{\varphi}$ für Y induziert, sowie $g := f \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$. Dann wird durch $\widehat{g}(x_1, \ldots, x_n) := g(x_1, \ldots, x_p)$ eine differenzierbare Fortsetzung von g auf einer Umgebung von $\varphi(x)$ im $\mathbb{R}^n$ definiert. Sei $\widehat{f} := \widehat{g} \circ \varphi$. Dann ist

$$\widehat{f} \circ i \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{y}) = \widehat{f} \circ \varphi^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{0}) = \widehat{g}(\mathbf{y}, \mathbf{0}) = g(\mathbf{y}) = f \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{y}),$$

also $\widehat{f}|_Y = f$, d.h. $\widehat{f}$ eine lokale differenzierbare Fortsetzung von f.

Ist $D \in T_x(Y)$ und $i_*D = 0$, so ist $D(f|_Y) = 0$ für jede differenzierbare Funktion auf X. Wegen der lokalen Fortsetzbarkeit ist dann $D(f) = 0$ für jede differenzierbare Funktion auf Y, d.h. es ist $D = 0$. Damit ist i_* injektiv.

Definition

Sei $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. f heißt eine ***Immersion*** (bzw. ***Submersion***) in $x \in X$, falls $f_* : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ injektiv (bzw. surjektiv) ist.

Die Abbildung f heißt eine ***Einbettung***, falls $f(X) \subset Y$ eine Untermannigfaltigkeit und $f : X \to f(X)$ ein Diffeomorphismus ist.

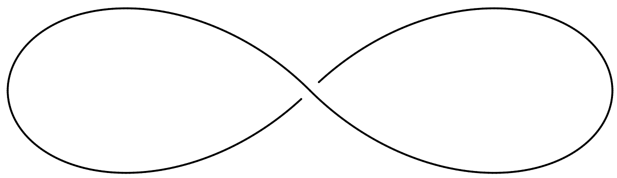
1.3.6. Satz

Sei $f : X \to Y$ eine Immersion (auf ganz X). Dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$ und eine offene Umgebung $W = W(f(x))$, so dass $f(U) \subset W$ und $f|_U : U \to W$ eine Einbettung ist.

Beweis: Man wähle Karten φ für X in x mit $\varphi(x) = \mathbf{0}$ und ψ für Y in $f(x)$ mit $\psi(f(x)) = \mathbf{0}$. Die Abbildung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ hat konstanten Rang, stimmt also (nach weiteren Koordinatentransformationen) in der Nähe von $\mathbf{0}$ mit der Abbildung $j : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto (u_1, \ldots, u_n, 0, \ldots, 0)$ überein (Satz vom Rang).

Wir können annehmen, dass schon $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = j$ ist, also $f|_U = \psi^{-1} \circ j \circ \varphi$. Das ist offensichtlich eine Einbettung. ∎

Selbst eine injektive Immersion braucht (global) keine Einbettung zu sein. Ein Beispiel ist etwa die Lemniskate:



1.3.7. Satz

Sei $f : X \to Y$ eine Immersion. Ist $f : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus (wobei $f(X)$ mit der Relativtopologie zu versehen ist), so ist f eine Einbettung.

Beweis: Sei $\dim(X) = n$, $\dim Y = m$ und $x \in X$. Nach Satz 1.3.6 gibt es eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$, eine offene Umgebung $W = W(f(x)) \subset Y$ und Koordinaten $y_1, \ldots, y_m$ für Y auf W, so dass gilt:

$$W \cap f(U) = \{y \in W \,:\, y_{n+1} = \ldots = y_m = 0\}.$$

Weil $f : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus ist, ist $f(U)$ offen in $f(X)$ (in der Relativtopologie). Es gibt also eine offene Umgebung $V = V(x) \subset Y$, so dass $f(U) = f(X) \cap V$ ist. Dann ist $\widehat{U} := V \cap W$ ebenfalls eine offene Umgebung von $f(x)$, mit $f(X) \cap \widehat{U} = f(U) \cap W$. Aber das zeigt, dass $f(X)$ Untermannigfaltigkeit von Y ist.

Aus der lokalen Beschreibung von $f(X)$ sieht man, dass X und $f(X)$ die gleiche Dimension haben. Weil f eine Immersion ist, ist $f_{*,x}$ dann überall ein Isomorphismus. Also ist $f : X \to f(X)$ lokal (und als Homöomorphismus dann auch global) ein Diffeomorphismus. Damit ist $f : X \to Y$ eine Einbettung. ∎

Wir erinnern uns: Sei $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Ist f lokal eigentlich, so ist $f(X)$ in Y abgeschlossen. Ist f außerdem noch injektiv, so ist $f : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus. Daraus folgt:

1.3.8. Satz

Sei $f : X \to Y$ eine injektive, lokal eigentliche Immersion. Dann ist f eine Einbettung.

1.3.9. Folgerung

Ist X kompakt und $f : X \to Y$ eine injektive Immersion, so ist f eine Einbettung.

Beweis: Da X kompakt ist, ist f lokal eigentlich. ∎

1.3.10. Satz

Sei $F : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung (zwischen Mannigfaltigkeiten). Sei $x_0 \in X$ und $y_0 := F(x_0)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *F ist eine Submersion in x_0, d.h., es ist $\mathrm{rg}_{x_0}(F) = \dim(Y)$.*
2. *Es gibt Umgebungen $U = U(x_0) \subset X$ und $V = V(y_0) \subset Y$ mit $F(U) \subset V$, eine Mannigfaltigkeit Z und eine differenzierbare Abbildung $G : U \to Z$, so dass $x \mapsto (F(x), G(x))$ einen Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge von $V \times Z$ definiert.*
3. *Es gibt eine offene Umgebung $V = V(y_0) \subset Y$ und eine differenzierbare Abbildung $s : V \to X$ mit $s(y_0) = x_0$ und $F \circ s = \mathrm{id}_V$. (Man nennt s dann einen* ***lokalen Schnitt*** *für F.)*

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2) : Wir können uns auf die lokale Situation beschränken und annehmen, dass $U = U(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$ und $V = V(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^m$ offene Umgebungen sind und $F : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung mit $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $\mathrm{rg}(J_F(\mathbf{0})) = m$ ist.

Wir schreiben $J_F(\mathbf{0}) = \big(J'_F(\mathbf{0}), J''_F(\mathbf{0})\big)$, mit $J'_F(\mathbf{0}) \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ und $J''_F(\mathbf{0}) \in M_{m,n-m}(\mathbb{R})$. Nach Wahl geeigneter Koordinaten können wir annehmen, dass $\det J'_F(\mathbf{0}) \neq 0$ ist. Wir definieren eine neue differenzierbare Abbildung $\widetilde{F} : U \to V \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$\widetilde{F}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') := (F(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \mathbf{x}''), \qquad \text{für } \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Dann ist

$$J_{\widetilde{F}}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} J'_F(\mathbf{0}) & J''_F(\mathbf{0}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{n-m} \end{pmatrix}, \qquad \text{und daher } \det J_{\widetilde{F}}(\mathbf{0}) \neq 0.$$

Nach dem Satz über inverse Abbildungen gibt es Umgebungen $\widetilde{U}(\mathbf{0}) \subset U$ und $W(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\widetilde{F} : \widetilde{U} \to W$ ein Diffeomorphismus ist.

$Z := \mathbb{R}^{n-m}$ ist eine Mannigfaltigkeit und $G := \mathrm{pr}_2 : \widetilde{U} \to Z$ mit $(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \mapsto \mathbf{x}''$ ist eine differenzierbare Abbildung, so dass $(F, G) = \widetilde{F}$ nahe $\mathbf{0}$ ein Diffeomorphismus ist.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Sind U, V, Z und G gegeben, so dass $F(U) \subset V$ und $(F, G) : U \to W \subset V \times Z$ ein Diffeomorphismus ist, so kann $s : V \to X$ definiert werden durch

$$s(y) := (F, G)^{-1}(y, G(x_0)).$$

Dann ist $(F, G)(s(y_0)) = (y_0, G(x_0)) = (F, G)(x_0)$ und daher $s(y_0) = x_0$. Außerdem ist $(F, G) \circ s(y) = (F, g) \circ (F, G)^{-1}(y, G(x_0)) = (y, G(x_0))$, also $F \circ s(y) = y$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : Ist s ein lokaler Schnitt für F mit $s(y_0) = x_0$, dann ist $J_F \cdot J_s$ nahe y_0 die Einheitsmatrix. So folgt unmittelbar, dass J_F eine surjektive Abbildung repräsentiert, dass also $\mathrm{rg}_{x_0}(F) = m$ ist. ∎

1.3.11. Folgerung

Ist $F : X \to Y$ eine Submersion, so ist für jedes $y \in Y$ die Faser $F^{-1}(y)$ leer oder eine $(n-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von X. Für jedes $x \in F^{-1}(y)$ ist $T_x(F^{-1}(y)) = \mathrm{Ker}\, F_{*,x}$.

Ist F zusätzlich surjektiv und $K \subset Y$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist $F^{-1}(K) \subset X$ eine $(n-m+k)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

BEWEIS: Wir betrachten einen Punkt $x_0 \in X$. Es sei $M := F^{-1}(y_0)$ die Faser über $y_0 := F(x_0)$. Dann können wir Umgebungen $U = U(x_0) \subset X$, $V = V(y_0) \subset Y$, eine $(n-m)$-dimensionale Mannigfaltigkeit Z, und eine differenzierbare Abbildung $G : U \to Z$ finden, so dass $(F, G) : U \to W \subset V \times Z$ ein Diffeomorphismus ist. Folglich ist $M \cap U = (F|_U, G)^{-1}(\{y_0\} \times Z)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - m$.

Da $f|_M$ konstant ist, ist $F_{*,x_0} \equiv 0$. Also liegt $T_{x_0}(M)$ in $\mathrm{Ker}(F_{*,x_0})$. Aus Dimensionsgründen muss dann sogar Gleichheit gelten.

Ist $K \subset V$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist $F^{-1}(K) \cap U = (F|_U, G)^{-1}(K \times Z)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - m + k$. ∎

Bemerkung: Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen und umfasst damit auch die Theorie der Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$.

1.3.12. Beispiel

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist eine offene Teilmenge von $M_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Sei

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,:\, \det(A) = 1\}.$$

Die Determinante $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ ist eine differenzierbare Abbildung, mit $\det^{-1}(1) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Wir wollen zeigen, dass $\det_{*,A} : T_A\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to T_{\det A}(\mathbb{R}^*) \cong \mathbb{R}$ für jedes $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ den Rang 1 hat. Dazu schreiben wir A in der Form $A = \big(\mathbf{a}_1^\top, \ldots, \mathbf{a}_n^\top\big)$. O.B.d.A. sei $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$. Wir definieren $\alpha_A : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ durch

$$\alpha_A(t) := \big((1+t)\mathbf{a}_1^\top, \mathbf{a}_2^\top, \ldots, \mathbf{a}_n^\top\big).$$

Dann ist $\alpha_A(0) = A$ und $\alpha_A(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ für genügend kleines t. Außerdem ist $\alpha_A'(0) = \big(\mathbf{a}_1^\top, \mathbf{0}^\top, \ldots, \mathbf{0}^\top\big) \neq \mathbf{0}$ und

$$\det{}_{*,A}(\alpha'(0)) = (\det \circ \alpha_A)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (1+t)\det(A) = \det(A) \neq 0,$$

also $\text{rg}\,\det_{*,A} = 1$. Das zeigt, dass $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ eine (n^2-1)-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Sei E die Einheitsmatrix. Dann ist $T_E(\text{SL}_n(\mathbb{R})) = \text{Ker}(\det_{*,E})$. Wir wollen $\det_{*,E}$ berechnen.

Die Matrizen E_{ij} mit einer 1 an der Stelle (i,j) und Nullen sonst bilden eine Basis von $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Sei $\alpha_{ij}(t) := E + tE_{ij}$. Dann ist $\alpha_{ij}(0) = E$ und

$$\det \circ \alpha_{ij}(t) = \begin{cases} 1+t & \text{falls } i=j \\ 1 & \text{falls } i \neq j. \end{cases},$$

also

$$(\det \circ \alpha_{ij})'(0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases},$$

Eine andere Linearform auf $M_{n,n}(\mathbb{R})$ ist die Spur. Für sie gilt:

$$\text{Spur}(E_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases},$$

Das zeigt, dass $\det_{*,E} = \text{Spur}$ ist, und damit

$$T_E(\text{SL}_n(\mathbb{R})) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \,:\, \text{Spur}(A) = 0\}.$$

Definition

Eine ***Liegruppe*** ist eine Gruppe G mit einer differenzierbaren Struktur, so dass gilt:

1. Die Abbildung $g \mapsto g^{-1}$ (von G nach G) ist differenzierbar.

2. Die Abbildung $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ (von $G \times G$ nach G) ist differenzierbar.

Beispiele sind $\mathbb{R}^n$ (mit Addition), $\mathbb{R}^*$ (mit Multiplikation), $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\text{SL}_n(\mathbb{R})$.

Der Tangentialraum in der 1 (dem neutralen Element der Gruppe) wird auch als ***Liealgebra*** der Liegruppe bezeichnet. Über die Multiplikation in dieser Algebrastruktur können wir erst später sprechen. Im Falle der Matrizengruppen wird sich zeigen, dass die Multiplikation durch den „Kommutator“ $[A,B] := AB - BA$ gegeben ist. Sie ist i.A. also weder kommutativ noch assoziativ.

1.3.13. Satz (Whitney)

Sei X eine kompakte n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Einbettung $f : X \to \mathbb{R}^N$.

Beweis: Zu jedem Punkt $p \in X$ gibt es eine eine Umgebung $U_p = U_p(p)$ und eine Karte $\varphi_p : U_p \to \mathbb{R}^n$, so dass gilt:

$$\varphi_p(p) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \varphi_p(U_p) = B_{3r}(\mathbf{0}) \quad (\text{für ein } r > 0).$$

Sei $V_p := \varphi_p^{-1}(B_r(\mathbf{0}))$ und $W_p := \varphi_p^{-1}(\overline{B_{2r}(\mathbf{0})})$. Dann ist W_p kompakt und $V_p \subset W_p \subset U_p$. Sei $f_p : X \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $0 \le f_p \le 1$, $f_p|_{V_p} = 1$ und $f_p = 0$ auf $X \setminus W_p$. Man kann auch erreichen, dass $f_p < 1$ außerhalb von $\overline{V}_p$ ist.

Sei $\psi_p : X \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\psi_p(x) := \begin{cases} f_p(x) \cdot \varphi_p(x) & \text{für } x \in U_p, \\ \mathbf{0} & \text{für } x \in X \setminus W_p \end{cases}$$

Dann ist ψ_p eine differenzierbare Abbildung, die außerhalb von W_p verschwindet.

Weil X kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $p_1, \ldots, p_k \in X$, so dass die Mengen $V_\nu := V_{p_\nu}$ bereits X überdecken. Für $\nu = 1, \ldots, k$ sei $\psi_\nu := \psi_{p_\nu}$ und $f_\nu := f_{p_\nu}$. Dann definieren wir $f : X \to \mathbb{R}^{kn+k}$ durch

$$f(x) := \big(\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x), f_1(x), \ldots, f_k(x)\big).$$

Offensichtlich ist f eine differenzierbare Abbildung.

f ist injektiv: Sei $x \neq y$.

1. Fall: Liegen x und y beide in einer Menge $\overline{V}_\nu$, so ist

$$\psi_\nu(x) = \varphi_{p_\nu}(x) \neq \varphi_{p_\nu}(y) = \psi_\nu(y).$$

2. Fall: Sei $x \in \overline{V}_\nu$ und $y \notin \overline{V}_\nu$. Dann ist $f_\nu(x) = 1 \neq f_\nu(y)$.

In beiden Fällen ist $f(x) \neq f(y)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass f eine Immersion ist. Ist $x_0 \in X$ beliebig, so liegt x_0 in einer der Mengen V_ν. Dann bildet $\psi_\nu = \varphi_{p_\nu}$ die Umgebung V_ν diffeomorph auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ab. Also hat f_{*,x_0} den Rang n.

Weil X kompakt und f eine injektive Immersion ist, ist f eine Einbettung. ∎

1.3.14. Folgerung

Jede kompakte Mannigfaltigkeit ist ein metrischer Raum.

Mit Hilfe einer kompakten Ausschöpfung kann man diese Ergebnisse auf beliebige Mannigfaltigkiten verallgemeinern.

Definition

Sei $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung und $Z \subset Y$ eine Untermannigfaltigkeit. f heißt ***transversal*** zu Z, falls für alle $x \in X$ mit $y := f(x) \in Z$ gilt:

$$f_{*,x}(T_x X) + T_y Z = T_y Y.$$

1.3.15. Satz

Sei $f : X \to Y$ transversal zu einer k-codimensionalen Untermannigfaltigkeit $Z \subset Y$. Dann ist $f^{-1}(Z)$ leer oder eine k-codimensionale Untermannigfaltigkeit von X.

BEWEIS: Es handelt sich um ein lokales Problem. Deshalb kann man annehmen, dass $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{m-q}$ und $Z = \mathbb{R}^q \times \{\mathbf{0}\}$ ist, sowie $x = y = \mathbf{0}$. Sei $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-q}$ die durch $(\mathbf{y}', \mathbf{y}'') \mapsto \mathbf{y}''$ gegebene Projektion.

Sei $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{m-q} = T_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^{m-q})$ gegeben. Dann ist $(\mathbf{0}, \mathbf{w}) \in T_{\mathbf{0}}(Y)$ und $\pi_*(\mathbf{0}, \mathbf{w}) = \pi(\mathbf{0}, \mathbf{w}) = \mathbf{w}$. Wegen der Transversalität gibt es ein $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ und ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$ mit $f_*(\mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{w})$. Weil $\pi_*(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ist, folgt: $(\pi \circ f)_*(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$.

Damit ist $\pi \circ f : X \to \mathbb{R}^{m-q}$ im Nullpunkt eine Submersion und $(\pi \circ f)^{-1}(\mathbf{0}) = f^{-1}(Z)$ eine Untermannigfaltigkeit (oder leer). ∎

1.3.16. Satz

Gegeben seien zwei differenzierbare Abbildungen $f : X \to Z$ und $g : Y \to Z$, und für alle $x \in X$ und $y \in Y$ mit $f(x) = g(y) =: z$ sei $f_{*,x}(T_x X) + g_{*,y}(T_y Y) = T_z Z$. Dann ist

$$X \times_Z Y := \{(x, y) \in X \times Y \ : \ f(x) = g(y)\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $X \times Y$.

Man nennt $X \times_Z Y$ das ***Faserprodukt*** von X und Y über Z.

BEWEIS: Wir betrachten die Abbildung $F := f \times g : X \times Y \to Z \times Z$ und die Untermannigfaltigkeit $\Delta_Z := \{(s, t) \in Z \times Z \ : \ s = t\}$ und wollen zeigen, dass F transversal zu Δ_Z ist. Offensichtlich ist $F^{-1}(\Delta_Z) = X \times_Z Y$.

Sei $(x, y) \in X \times Y$ mit $f(x) = g(y) =: z$, also $F(x, y) = (z, z) \in \Delta_Z$. Zu zeigen ist:

$$F_{*,(x,y)} T_{(x,y)}(X \times Y) + T_{(z,z)} \Delta_Z = T_{(z,z)}(Z \times Z).$$

Dabei ist $T_{(x,y)}(X \times Y) = T_x(X) \oplus T_y(Y)$ und

$$T_{(z,z)}(\Delta_Z) = \{(u, v) \in T_z(Z) \oplus T_z(Z) \ : \ u = v\}.$$

Sei $(u, v) \in T_{(z,z)}(Z \times Z) = T_z(Z) \oplus T_z(Z)$. Dann gibt es Tangentialvektoren $a, c \in T_x(X)$ und $b, d \in T_y(Y)$ mit $u = f_{*,x} a + g_{*,y} b$ und $v = f_{*,x} c + g_{*,y} d$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (u, v) &= \big(f_{*,x}(a - c), g_{*,y}(d - b)\big) + \big(f_{*,x} c + g_{*,y} b, f_{*,x} c + g_{*,y} b\big) \\ &= F_{*,(x,y)}(a - c, d - b) + (e, e), \end{aligned}$$

mit $e = f_{*,x} c + g_{*,y} b \in T_z(Z)$. Damit ist alles gezeigt. ∎

Bemerkung: Ist $i_y : X \to X \times Y$ definiert durch $i_y(x) := (x, y)$ und $j_x : Y \to X \times Y$ definiert durch $j_x(y) := (x, y)$, so ist $T_{(x,y)}(X \times Y) = (i_y)_{*,x}T_x(X) \oplus (j_x)_{*,y}T_y(Y)$. Der Einfachheit halber haben wir oben im Beweis die Abbildungen i_y und j_x weggelassen.

Definition

$T_a^*(X) := \mathrm{Hom}(T_a(X), \mathbb{R})$ heißt ***Cotangentialraum*** von X in a. Die Elemente von $T_a^*(X)$ nennt man ***Cotangentialvektoren***.

1.3.17. Beispiel

Ist f eine differenzierbare Funktion (auf einer Umgebung von a), so bezeichnet man den durch $(df)_a(D) := D(f)$ gegebenen Cotangentialvektor als das ***(totale) Differential*** von f in a.

Weil $(dx_\nu)\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\Big) = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}(x_\nu) = \delta_{\nu\mu}$ ist, bilden die Differentiale $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ eine Basis von $T_a^*(X)$, nämlich die duale Basis zur Basis $\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\}$.

Man rechnet leicht nach:

1. $d(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \cdot df_1 + c_2 \cdot df_2$.
2. $d(fg) = f(a) \cdot dg + g(a) \cdot df$.
3. $d(c) = 0$ für jede nahe a konstante Funktion c.
4. $d\big(\dfrac{f}{g}\big) = \dfrac{1}{g(a)^2}\big(g(a) \cdot df - f(a) \cdot dg\big)$.

Definition

Ist $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und $a \in X$, so wird die ***Cotangentialabbildung*** $\Phi^* : T^*_{\Phi(a)}(Y) \to T_a^*(X)$ definiert durch

$$\Phi^*\omega(D) := \omega(\Phi_* D).$$

Zu jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ gibt es die duale Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ (mit $f^*(\lambda) := \lambda \circ f$). Φ^* ist die zu Φ_* duale lineare Abbildung, und es gilt:

1. $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{T_a^*(X)}$.
2. Ist $\Psi : Y \to Z$ differenzierbar, so ist $(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*$.
3. Es ist $\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi)$.

Zum Beweis der letzten Aussage:

$$\Phi^*(df)(D) = df(\Phi_* D) = \Phi_* D(f) = D(f \circ \Phi) = d(f \circ \Phi)(D).$$