Übungen zu Grundlagen der Mathematik | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 7 | Prof. Dr. Britta Späth
Abgabe bis 14.12.2017 | PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Seien X, Y zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) Ist f injektiv, so gibt es eine Abbildung $g : Y \to X$, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

b) Ist f surjektiv, so gibt es eine Abbildung $g : Y \to X$, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die folgenden Permutationen $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_6$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie σ, τ und τ^{-1} als Produkt von Transpositionen.

Aufgabe 3

Sei M eine Menge. Zeigen Sie:

a) Ist M abzählbar, so ist die Menge aller **endlichen** Teilmengen von M abzählbar.

b) Ist M endlich, so ist $\mathcal{P}(M)$ endlich.

c) Ist M überabzählbar, so ist auch $\mathcal{P}(M)$ überabzählbar.

d) Die Menge aller Permutationen $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{S}_n$ ist abzählbar.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Die Menge der ganzen Zahlen, die als Quersumme eine durch drei teilbare Zahl haben, ist abzählbar.

b) Jede unendliche Teilmenge einer überabzählbaren Menge ist überabzählbar.

c) Seien $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{S}_n$ zwei Transpositionen. Dann ist auch $\tau_1 \circ \tau_2$ eine Transposition.

d) Sei $\tau \in \mathcal{S}_n$ ein Element mit $\tau^2 = \mathrm{id}_{\underline{n}}$. Dann ist τ eine Transposition in $\mathcal{S}_n$.

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Sie folgende Aussagen benutzen:

- $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.
- Seien M und A_m $(m \in M)$ abzählbare Mengen. Dann ist $\bigcup_{m \in M} A_m$ abzählbar.