Teilchenbeschleuniger

Kreisbeschleuniger

Holger Spahr

18. Januar 2008

Zyklotron

Zyklotron

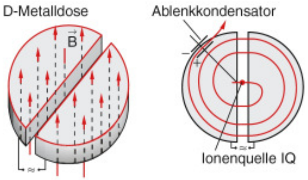


Abbildung: Zyklotron, links: Seitenansicht; rechts: Draufsicht

- beschleunigt positiv geladene Ionen auf maximal 100 MeV
- Zwei D-förmigen Vakuumkammern mit Spalt zwischen den Polschuhen zweier Magnete
- Ionenquelle inmitten des Spaltes
- Ansteuerung der Metallvakuumkammern mit Hochfrequenzspannung $U = U_0 \cdot \cos \omega t$

theoretische Betrachtungen

- keine elektrostatische Beschleunigung innerhalb der Kammerhälften $\rightarrow F_Z = F_L$

$$\frac{mv^2}{r} = q \cdot v \cdot B \quad (1)$$

$$r = \frac{m\,v}{q\,B} \quad (2)$$

Diese Bedingung heißt im folgenden *Gleichgewichtsbedingung*.

- Zeit für halben Umlauf

$$t = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{q\,B} \quad (3)$$

ist unabhängig von r!

theoretische Betrachtungen

- wähle Hochfrequenz $2\pi f_{HF} = \omega_{HF} = \frac{q}{m}B$

$$v = \omega_{HF} \cdot R = \frac{q}{m} R \cdot B \tag{4}$$

- kinetische Energie

$$E_{Kin} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{q^2}{2m} (R \cdot B)^2 \tag{5}$$

Betatron

Betatron

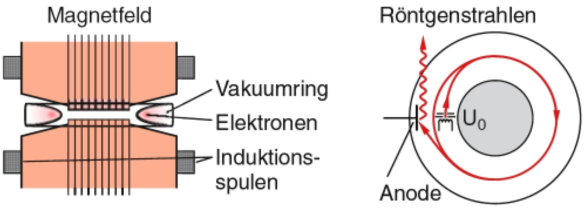


Abbildung: Betatron, links: Seitenansicht; rechts: Draufsicht

- beschleunigt Elektronen auf etwa $10^7\ eV$
- konstanter Bahnradius $\longrightarrow$ mit zunehmender Geschwindigkeit größeres Magnetfeld!

theoretische Betrachtungen

- da wachsendes Magnetfeld $\rightarrow$ Maxwell Relation berücksichtigen $\mathrm{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$$U_{ind} = \oint_S E \,\mathrm{d}s = \int_F \mathrm{rot}E \,\mathrm{d}F \tag{6}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_F B \,\mathrm{d}F = \pi r_0^2 \,\frac{\mathrm{d} < B >}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

wobei $< B >= \frac{1}{\pi r_0^2} \int_F B\mathrm{d}F$

- es ist also

$$U = 2\pi r_0 \cdot E = \pi r_0^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} < B > \tag{8}$$

theoretische Betrachtungen

- Impulsgewinn zur Zeit t:

$$p = \int F\mathrm{d}t = e \cdot \int E\mathrm{d}t = \frac{e\ r_0}{2} \int \frac{\mathrm{d} < B >}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{e\ r_0}{2} \cdot < B > \quad (9)$$

- da Kreisbewegung gilt noch immer: $F_Z = F_L$!

$$\frac{mv^2}{r_0} = e \cdot v \cdot B(r_0) \rightarrow p = m \cdot v = e \cdot r_0 \cdot B(r_0) \quad (10)$$

und damit bekommt man im Vergleich mit $p = \frac{e\ r_0}{2} \cdot < B >$ die *Wideroe-Bedingung*

$$B(r_0) = \frac{1}{2} \cdot < B > \quad (11)$$

wobei r_0 der konstante Radius der Elektronenbahn ist.

theoretische Betrachtungen

- Die erreichbare Endenergie beträgt inklusive der Ruheenergie des Teilchens ($\Phi = \int B \, \mathrm{d}F$):

$$E = \sqrt{(p\ c)^2 + (m_0\ c^2)^2} = \left[\left(\frac{e\ c}{2\pi\ r_0} \cdot \Phi(t) \right)^2 + \left(m_0\ c^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Synchrotron

Synchrotron

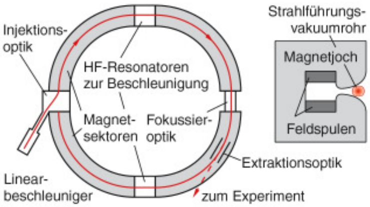


Abbildung: Synchrotron, links: Seitenansicht; rechts: Draufsicht

- beschleunigt geladene Teilchen auf $E > 10^9$ eV
- konstanter Bahnradius $\longrightarrow$ wachsende Magnetfelder benötigt
- Teilchenpakete bewegen sich in Vakuumrohr mit engem Querschnitt zwischen den Polschuhen vieler kreisförmig angeordneter Elektromagnete

Notwendigkeit eines Synchrotrons

Prinzipiell sind mit Zyklotron und Betatron zwei universell nutzbare Beschleunigertypen gegeben. Nachteil: Für Energien $E > 1\ GeV$ sind Zyklotron und Betatron ungeeignet. Wir betrachten ein Rechenbeispiel:
es war $r = \frac{m\ v}{q\ B}$; desweiteren definiert man $\alpha = \frac{E_{kin}}{m_0\ c^2}$,
$\frac{m(v)}{m_0} = 1 + \alpha$, $v = \frac{c}{1+\alpha} \cdot \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}$ und $p = m_0\ c\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}$.
Man schreibt deshalb die Gleichgewichtsbedingung um

$$r = \frac{m_0\ c}{q\ B}\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} = \frac{E_{kin}}{q \cdot c \cdot B}\sqrt{1 + \frac{2\ m_0 c^2}{E_{kin}}} \qquad (13)$$

Der Radius wächst mit dem Verhältnis $\frac{E_{kin}}{B}$ an.

Notwendigkeit eines Synchrotrons

Grenzwertbetrachtung: falls $E_{kin} >> m_0 \ c^2$ ist
$E_{kin}^{max} = q \cdot c \cdot B_{max} \cdot r_0$

- Beispiel 1

$$E = 30 \ GeV, B = 1 \ T \rightarrow r_0 = 100 \ m \tag{14}$$

- Beispiel 2

$$E = 300 \ GeV, B = 1 \ T \rightarrow r_0 = 1 \ km \tag{15}$$

Diese Dimensionen sind für die gewünschten Energien nicht wirtschaftlich. Abhilfe schafft das Synchrotron!

Funktionsweise von Synchrotrons

Die Funktionsweise eines Synchrotrons lässt sich durch die Betrachtung der verwendeten Bauteile beschreiben:

- Vorbeschleunigen der Teilchen in einem Linearbeschleuniger auf $v_1 = 0,8c \ldots 0,99c$
- Tangentialer Einschuss der Teilchen in die Sollbahn des Synchrotrons
- Magnetfeldelemente halten die Teilchen auf der vorgeschriebenen Bahn, Hohlraumresonatoren beschleunigen die Teilchenpakete, ionenoptische Linsen sorgen für die Strahlfokussierung

Experimentieren am Synchrotron

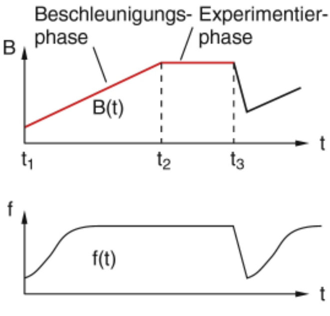


Abbildung: Synchrotron, oben: zeitlicher Verlauf des B-Feldes, unten: zeitlicher Verlauf der Frequenz

Der zeitliche Verlauf eines Experimentes am Synchrotron gliedert sich in drei Abschnitte:

- $t_1 - t_2$: Beschleunigungsphase
- $t_2 - t_3$: Experimentierphase
- $t_3 - t_1$: Regenerationsphase

Anpassung der Hochfrequenz bei hohen Energien

Obwohl die Teilchen durch den linearen Vorbeschleuniger bereits eine Energie von $50 \ldots 500\ MeV$ haben, ändert sich ihre Geschwindikeit innerhalb des Synchrotrons noch deutlich.
Für Elektronen bei $500\ MeV$ beträgt $\Delta v = 5 \cdot 10^{-4} c$, für Protonen hingegen ist $\Delta v = 0,2c$!

- Kontinuierliche Erhöhung der Beschleunigungshochfrequenz
- Anfangsfrequenz: $f_1 = f(t_1) = \frac{k \cdot v_1}{2\pi\ r_0}$
  Endfrequenz: $f_2 = f(t_2) = \frac{k \cdot c}{2\pi\ r_0}$
  k: Beschleunigungsstrecken innerhalb des Synchrotrons
- Aus $r_0 = \frac{m\ v}{q\ B}$ erhält man $B = \frac{m\ v}{q\ r_0}$ und daraus mit $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$B(v) = \frac{v}{q\ r_0} \cdot \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (16)$$

Anpassung der Hochfrequenz bei hohen Energien

Da sowohl f als auch B von v abhängen, sind beide nicht unabhängig voneinander. Man findet

$$f = \frac{k}{2\pi\sqrt{\left(\frac{r_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{m_0}{q\ r_0\ B}\right)^2}} \qquad (17)$$

Stabilisierung der Teilchenbahnen

Stabilisierung der Teilchenbahnen

Beim Durchlaufen eines Kreisbeschleunigers legen die Projektile große Strecken zurück. Damit die Projektile nicht durch Stöße mit Restgasatomen, Inhomogenitäten im Magnetfeld oder in den beschleunigenden elektrischen Feldern von ihrer Sollbahn abweichen und mit der Wand stoßen, muss ihre Bahn stabilisiert werden.
Beispiele für Laufstrecken:

1. Stanford Linearbeschleuniger: $s = 5\ km$
2. Synchrozyklotron bei 10^3 Umläufen: $s = 1,2 \cdot 10^4\ m$
3. Synchrotron bei $v \approx c$ und $\Delta t = 1s$: $s = 3 \cdot 10^5\ km$
4. Speicherring für $\tau > 10h$: $s = 4 \cdot 10^9\ km$

Stabilisierung im linearen Beschleunigungsabschnitt

Bei Driftröhren-Beschleunigern (siehe Linearbeschleuniger) wirken die beschleunigenden elektrischen Felder als elektrische Linsen für die Teilchenbahnen.

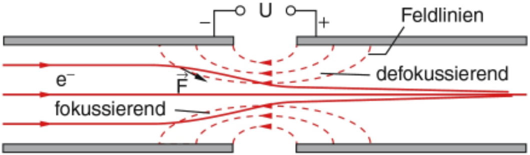
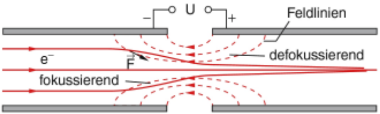


Abbildung: Elektrisches Feld zwischen zwei Driftröhren als Sammellinse für die Teilchenbahnen

Stabilisierung im linearen Beschleunigungsabschnitt



- beschleunigende Kraft $F = q \cdot E$ tangential zu den Feldlinien
- Kraft wirkt in der ersten Hälfte der Sollbahn fokussierend, in der zweiten Hälfte defokussierend
- bei elektrostatischer Beschleunigung ist die fokussierende Wirkung größer.
  Grund: Geschwindigkeit nimmt beim Durchlaufen des beschleunigenden Feldes zu, damit ist die radiale Ablenkung bei gleicher Radialkomponente E_r zu Anfang größer als am Ende der Beschleunigung

Vertikale Stabilisierung durch Magnetfelder

Um die Teilchenbahnen in der Ebene $z = 0$ vertikal zu stabilisieren, verwendet man ein radial nach außen abfallendes Magnetfeld

$$B_z(r) = B_0 \left(1 - n \cdot \frac{r - r_0}{r_0}\right) \tag{18}$$

mit $B_0 = B_z(r_0)$

und dem *Feldindex* $n = -\frac{\frac{\mathrm{d}B_z}{B_0}}{\frac{\mathrm{d}r}{r_0}} = -\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}r}\frac{r_0}{B_0}$

(relative Feldänderung pro relativer Radiusänderung)

Vertikale Stabilisierung

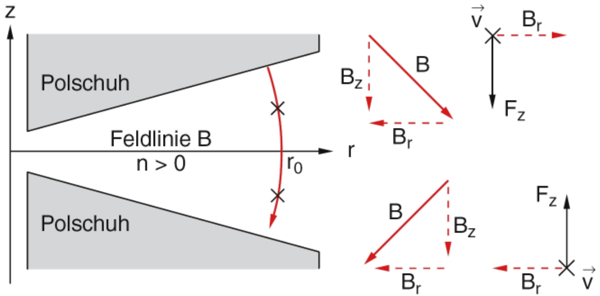
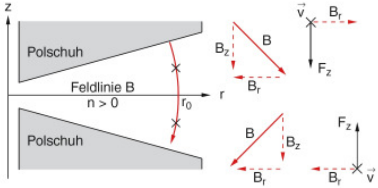


Abbildung: Vertikale Stabilisierung durch abfallendes Magnetfeld

- Krümmung der Magnetfeldlinien bewirkt neben z-Komponente auch Radialkomponente B_r falls $z \neq 0$

Vertikale Stabilisierung



- resultierende Lorentz-Kraft $\overrightarrow{F_L} = q \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B})$
  $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_r & 0 & B_z \end{pmatrix}$
  $\hookrightarrow F_L = q \cdot v \cdot B_r$
- bei statischem Magnetfeld gilt rot$B = \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$ und damit ist

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r} = -n \cdot \frac{B_0}{r_0} \tag{19}$$

Vertikale Stabilisierung

Für $z << r_0$ kann man B_0 als unabhängig von z ansehen und man erhält durch Integration

$$B_r(z) = -n \cdot \frac{B_0}{r_0} \cdot z \tag{20}$$

und damit eine Rücktreibende Kraft

$$F_z = -\frac{q \cdot v \cdot B_0}{r_0} \cdot n \cdot z \tag{21}$$

Teilchen, die mit $z > 0$ von ihrer Sollbahn abweichen werden somit nach unten zurückgedrängt, Teilchen, die mit $z < 0$ abweichen werden analog nach oben zurückgedrängt.

Vertikale Stabilisierung

Es resultiert nach

$$m\,\ddot{z} + \frac{q \cdot v \cdot B_0}{r_0} \cdot n \cdot z = 0 \tag{22}$$

eine periodische Schwingung mit der Frequenz $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{q}{m}\frac{v \cdot B_0}{r_0} \cdot n}$ und mit Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung $\frac{m\,v^2}{r_0} = q \cdot v \cdot B_0$

$$f_z = \frac{1}{2\pi}\frac{v}{r_0}\sqrt{n} \tag{23}$$

Beispiel: $v \approx c, r_0 = 100m, n = 1 \rightarrow f_z \approx 5 \cdot 10^5\,Hz$

Radiale Stabilisierung

Die Frage nach der radialen Stabilisierung stellt sich bei Störungen der Teilchenbahnen um $r = r_0$ in der $z = 0$ Ebene.
Auf dem Sollkreis gilt noch immer die Gleichgewichtsbedingung Lorentzkraft = Zentripetalkraft $\left(\frac{m\,v^2}{r_0} = q \cdot v \cdot B_0\right)$, sodass in der Gleichgewichtslage die Differenz der beiden Kräfte gleich Null ist.
Für $r \neq r_0$ gilt dies nicht mehr. Man findet die Differenzkraft

$$\Delta F_r = \left[\frac{m\,v^2}{r} - q \cdot v \cdot B_0 \left(1 - n \cdot \frac{r - r_0}{r_0}\right)\right] \tag{24}$$

$$= \frac{m\,v^2}{r_0} \cdot \left[\frac{1}{1 + \frac{r - r_0}{r_0}} - \left(1 - n \cdot \frac{r - r_0}{r_0}\right)\right] \tag{25}$$

Radiale Stabilisierung

Für $\frac{\Delta r}{r_0} << 1$ gilt: $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ und man erhält die Differenzkraft

$$\Delta F_r = -\frac{m\ v^2}{r_0} \cdot (1-n)(r-r_0) \qquad (26)$$

wobei der Feldindex $n = -\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}r}\frac{r_0}{B_0}$ war.
Für $n < 1$ ist die Kraft rücktreibend, so dass sie für $r > r_0$ ins Zentrum und für $r < r_0$ nach außen gerichtet ist.

- Demtröder, Experimentalphysik 4 (Kern-, Teilchen- und Astrophysik), 2. Auflage, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York
- http://www.desy.de [**D**eutsches **E**lektronen**sy**nchrotron, Hamburg (D)]
- http://www.cern.de [**C**onseil **E**uropéen pour la **R**echerche **N**ucléaire (heute (dt.): Europäische Organisation für Kernforschung), Genf (CH)]