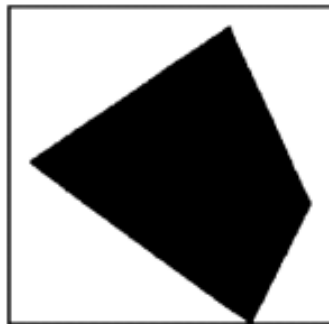
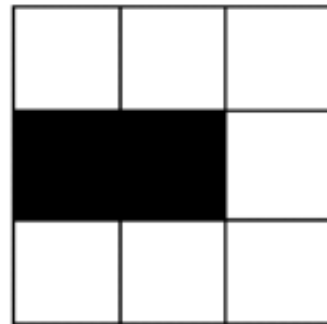


# Das Abtasttheorem

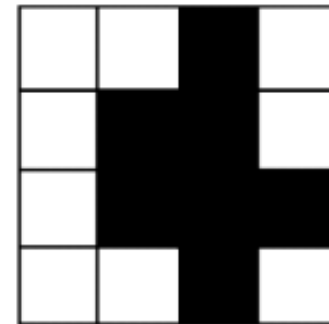
Problem bei räumlicher Abtastung:



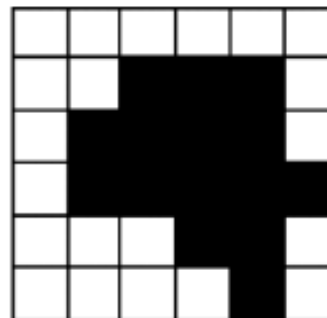
Original quadrilateral



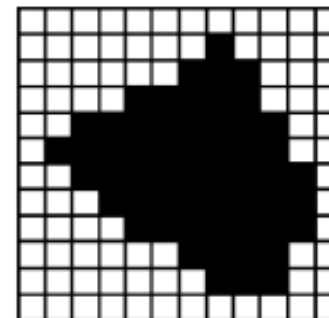
3 x 3



4 x 4

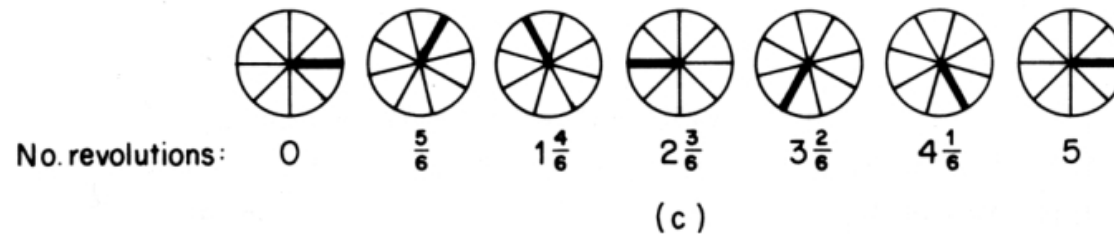
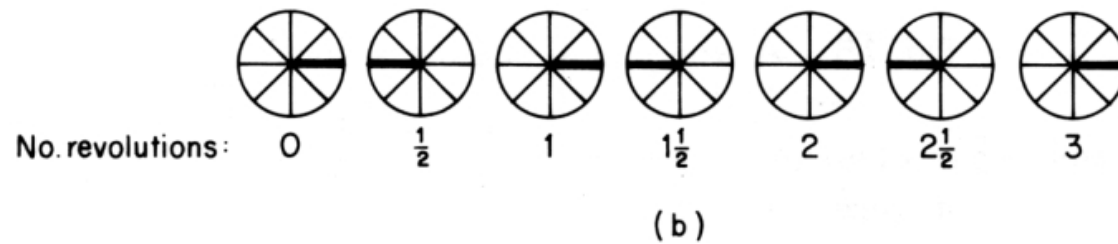
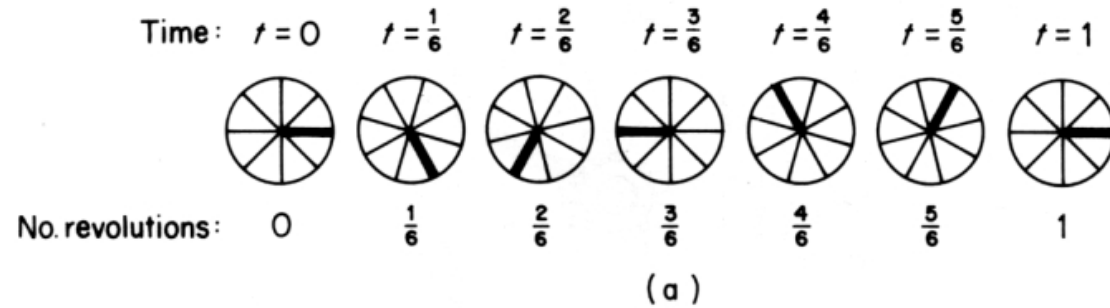


6 x 6



12 x 12

# Problem bei zeitlicher Abtastung:



# Darstellung auf Monitor

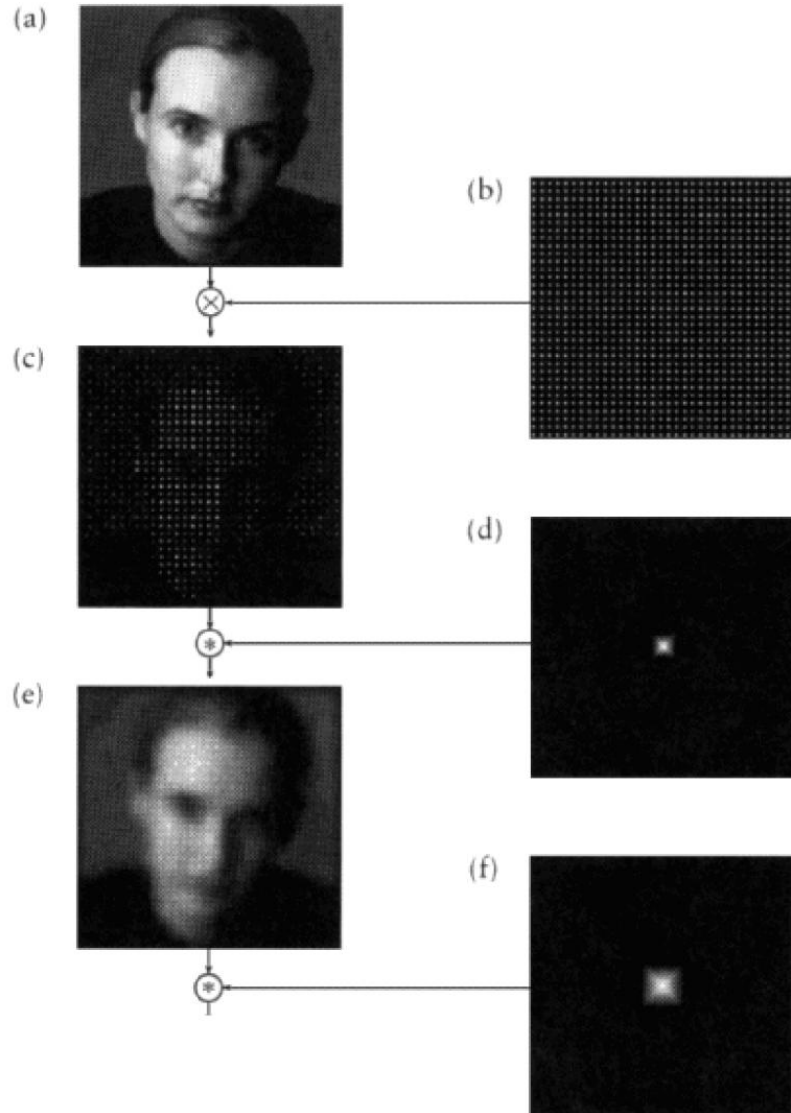
Was geschieht eigentlich, wenn ein Bild auf dem Monitor dargestellt wird ?

Ausgangspunkt:

Funktion  $a(t)$  (1D oder 2D)

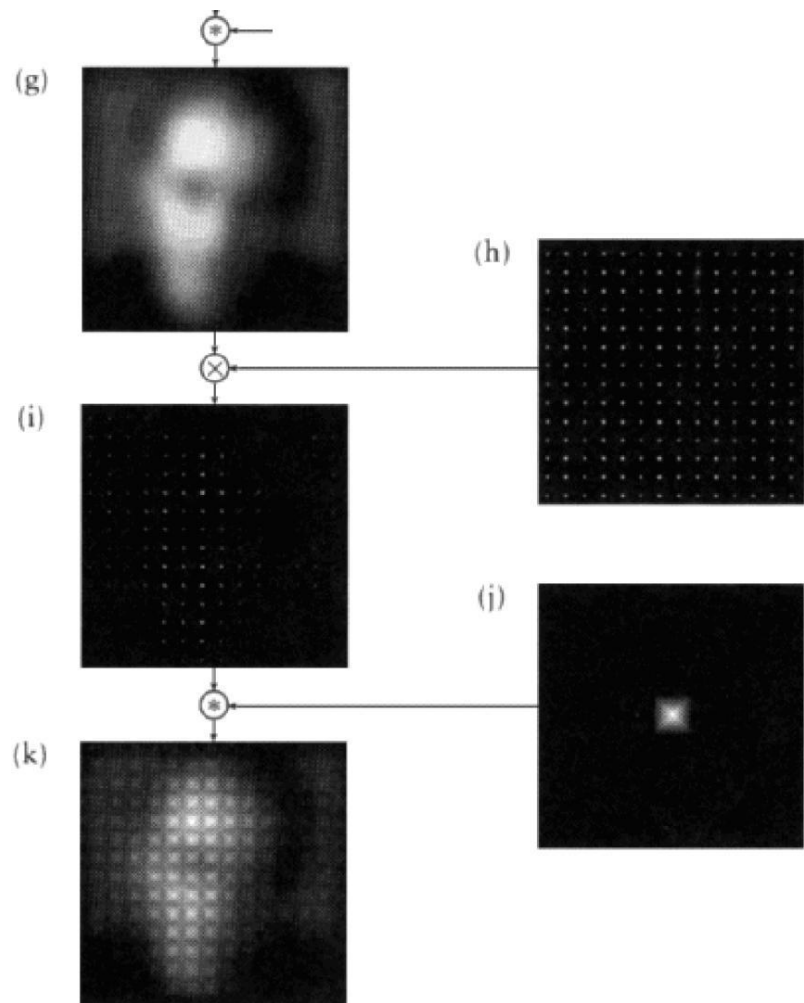
Endzustand:

Diskrete Werte bzw. stückweise konstante Funktion  $k$   
(Bildschirm)



Vorgehensweise:

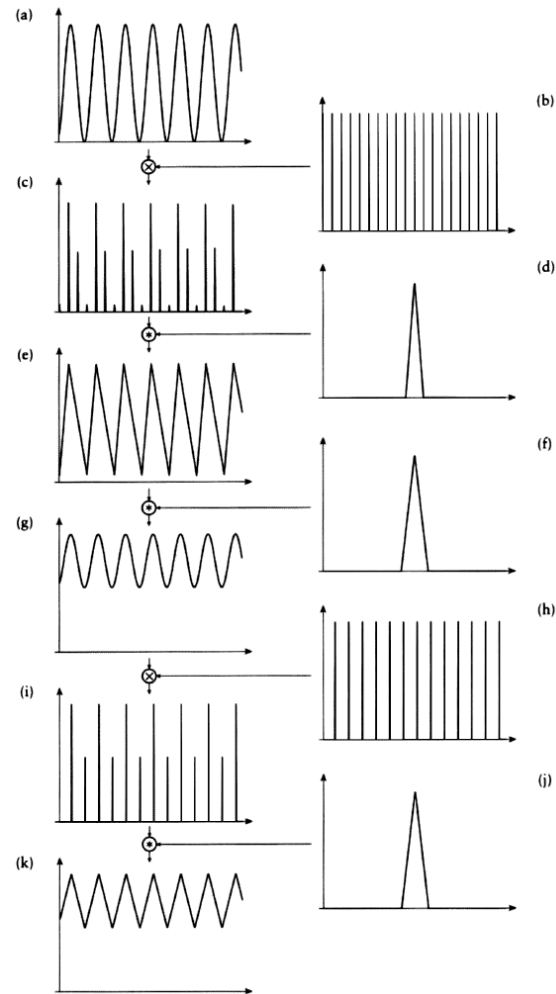
1.  $a(t)$  diskret abtasten  
Bilder (a),(b),(c)
2. Rekonstruktionsfilter anwenden  
(Bild d) um  $a(t)$  zurückzugewinnen (kann auch Box sein)  
→ Interpolation von Samples



3. Ausgabe mit anderer Rasterfrequenz, daher Signal glätten  
 → Signal glätten (Bild g)  
 → weiterer Filter
4. mit neuer Frequenz abtasten  
 für Bildschirm rekonstruieren  
 (Bild k)

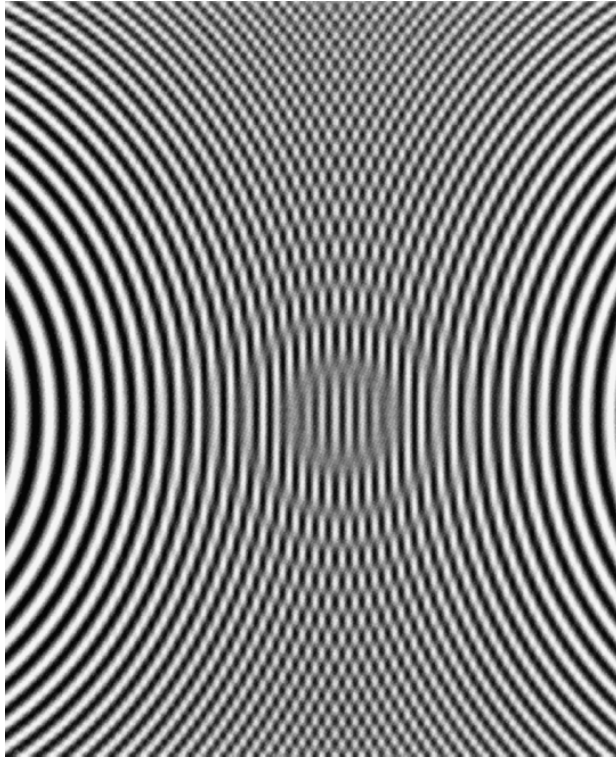
aus: Glassner, Principles of digital Image Synthesis

# Darstellung einer 1D-Funktion:

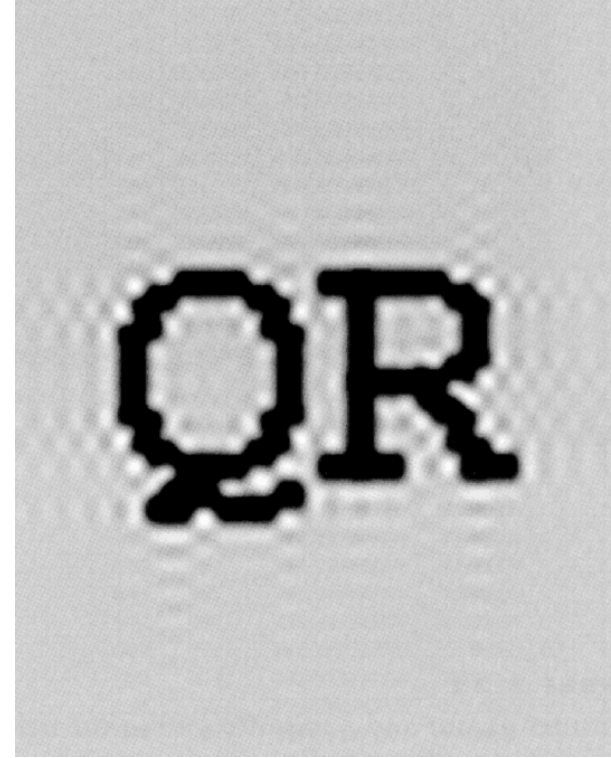


aus: Glassner, Principles of digital Image Synthesis

# Entstehende Filterprobleme



Moirémuster



Rekonstruktionsfehler

aus: Glassner, Principles of digital Image Synthesis

## Wo entstehen die Probleme?

→ diskrete Repräsentation kontinuierlicher Funktion

→ **Aliasing**

Alias: “ähnlich” aussehende Darstellung der kontinuierlichen Funktion durch diskrete Werte

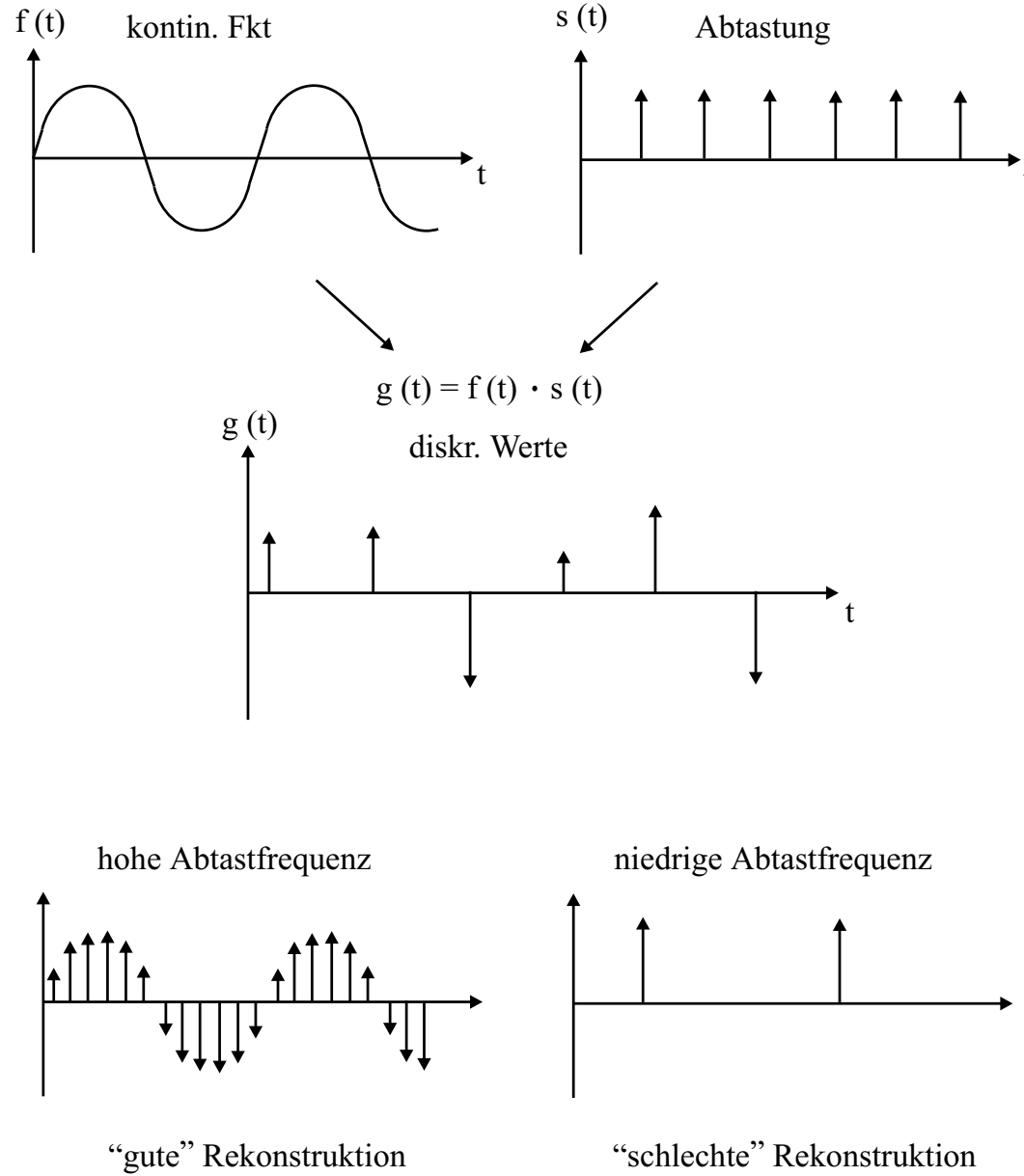
Beispiel:

Abtastung einer Sinusfunktion

Beispielfunktion:

$$\sin(2\pi\omega \cdot t)$$



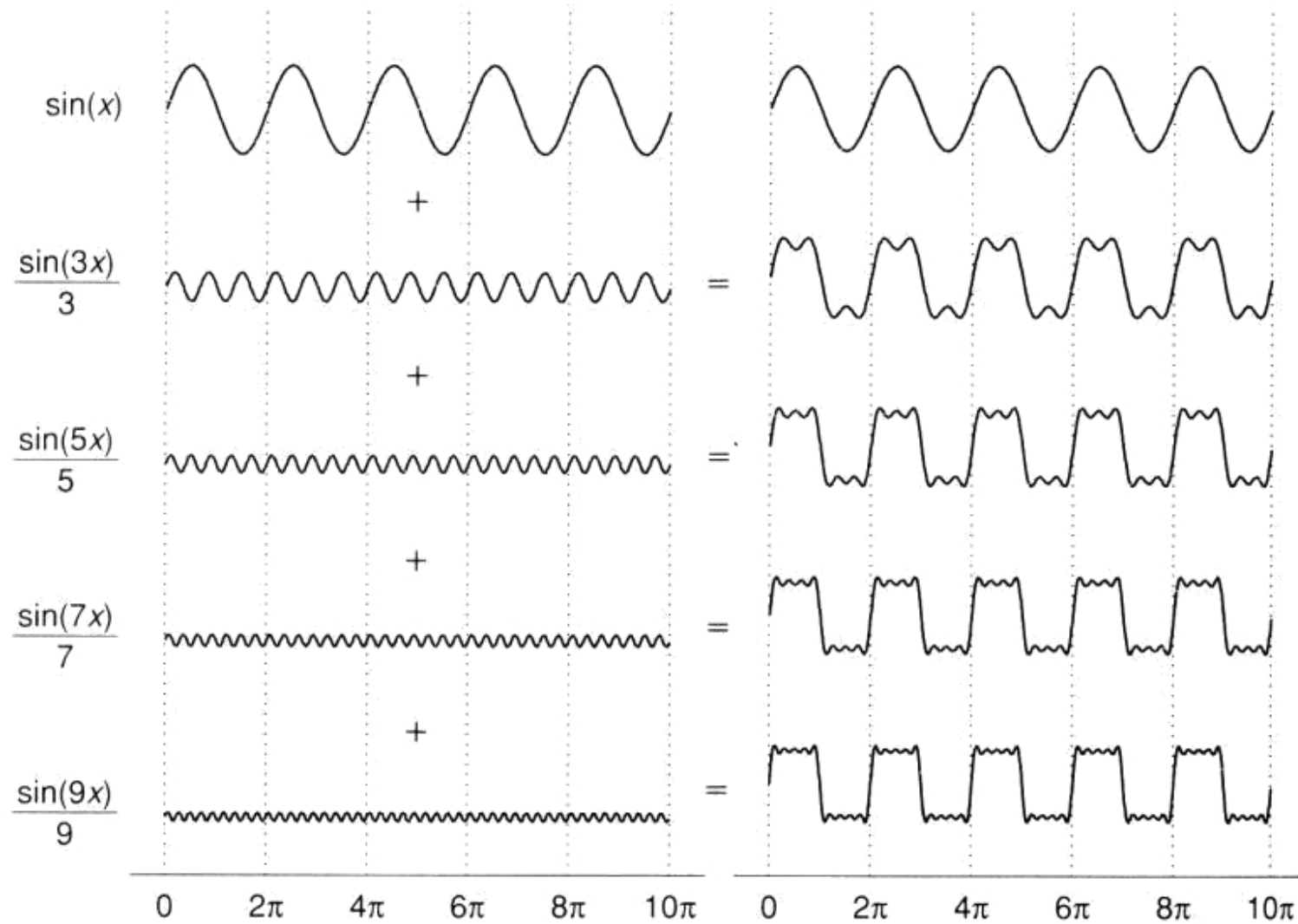


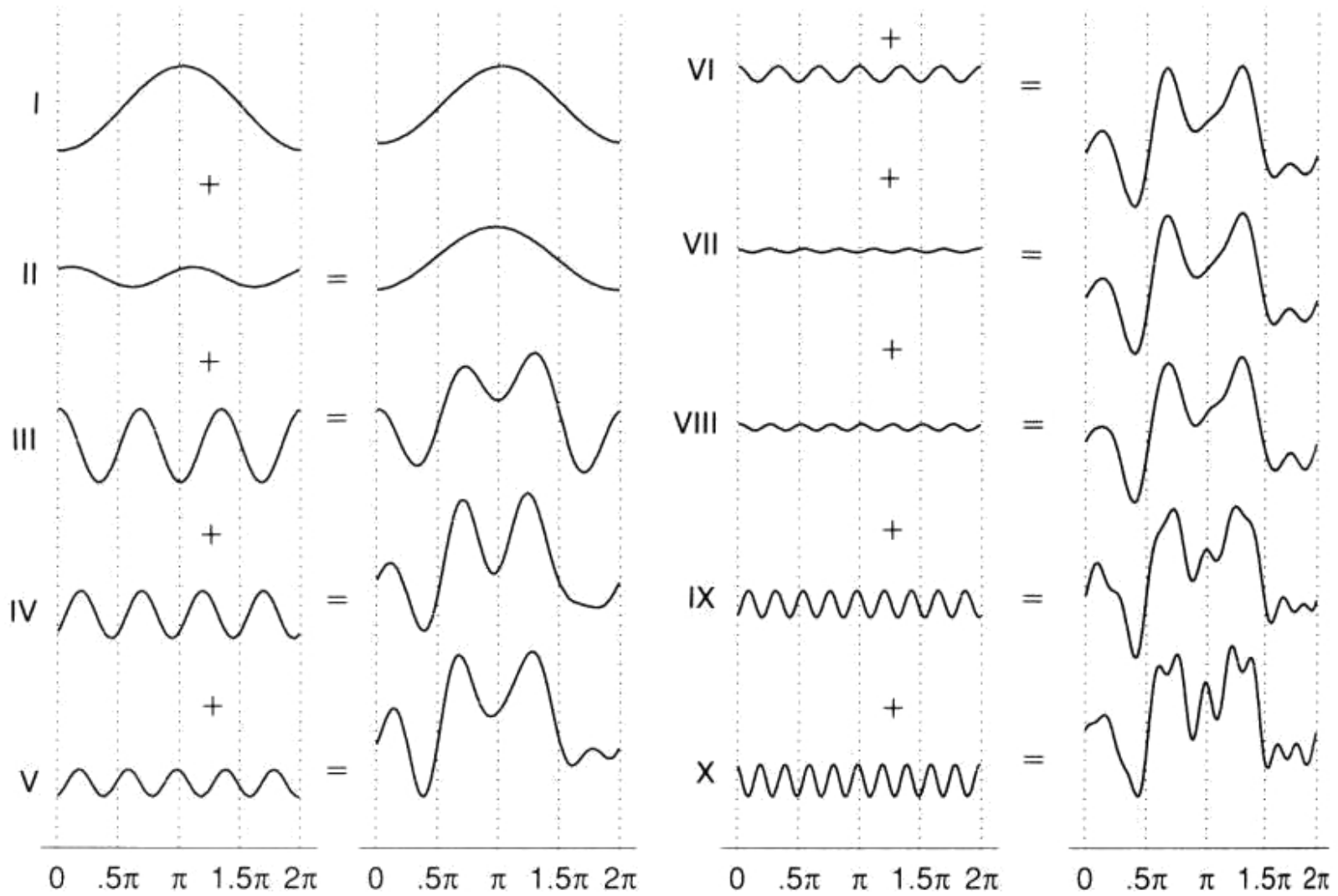
## Folgerung:

Zusammenhang zwischen Frequenz von  $f(t)$  und Abtastfrequenz

Ist  $f(t) = \sin(2\pi\omega \cdot t)$ , so ist  $\omega$  die Frequenz von  $f(t)$

Generell kann jede periodische Funktion in eine Summe von Sinusfunktionen zerlegt werden:





# Die Fouriertransformation (kleiner Ausflug)

→ zerlegt eine Funktion in Sinus- und Cosinusfunktionen.

→ andere Transformationen zerlegen auf andere Weise  
(Cosinus-, Walsch-, Wavelet-Transformation)

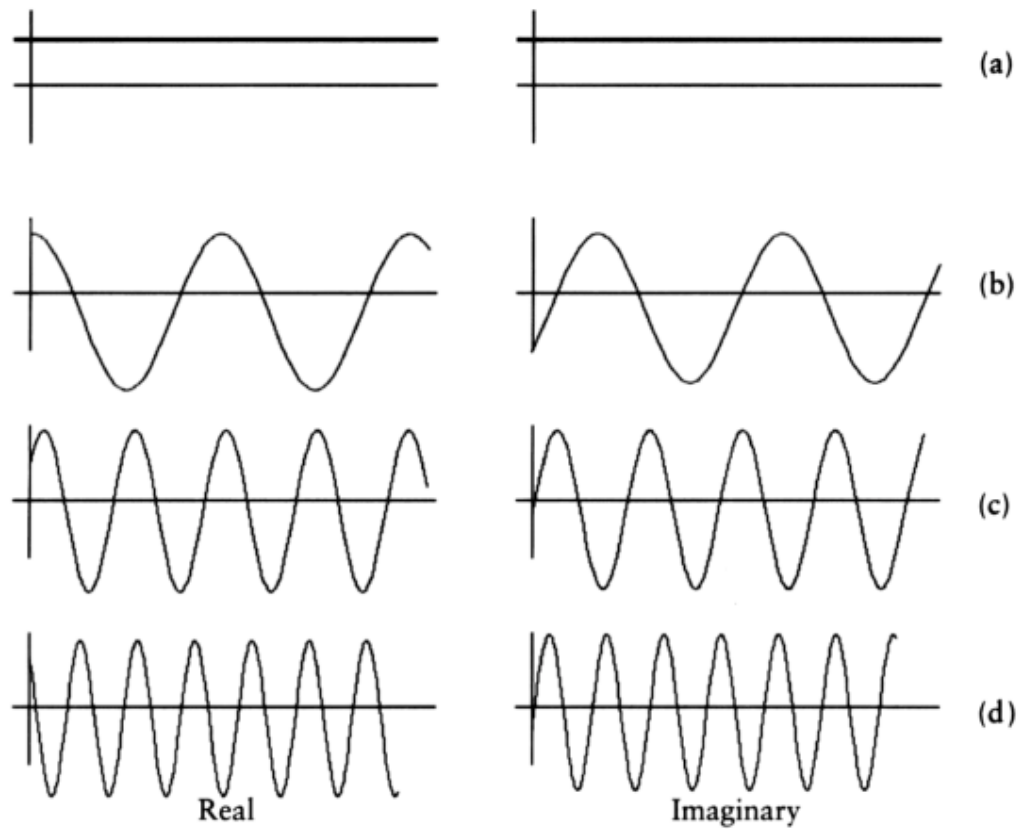
$$F(\omega) = \int f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

mit  $e^{-2\pi i \omega t} = \cos(2\pi \omega t) - i \sin(2\pi \omega t)$  ergibt sich:

$$F(\omega) = \int f(t) \cos(2\pi \omega t) dt + i \int -f(t) \sin(2\pi \omega t) dt$$

→ wie bei der Helligkeitsbestimmung des Auges, nur hier  
Empfindlichkeitsfunktionen Sinus- bzw. Cosinus-Funktionen  
verschiedener Frequenz

# Basisfunktionen:



(a)  $\omega = 0$  (b)  $\omega = 1$  (c)  $\omega = 2$  (d)  $\omega = 3$

→ FT ist eine komplexwertige Funktion  $\Rightarrow$  komplexwertiges Ergebnis

→ mit obiger Darstellung kann man  $F$  in Real und Imaginärteil zerlegen

$$F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega)$$

dasselbe drückt man in Polarkoordinaten aus:

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{i\Phi(\omega)}$$

mit:

$$|F(\omega)| = \sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2} \quad \Phi(\omega) = \arctan\left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right)$$

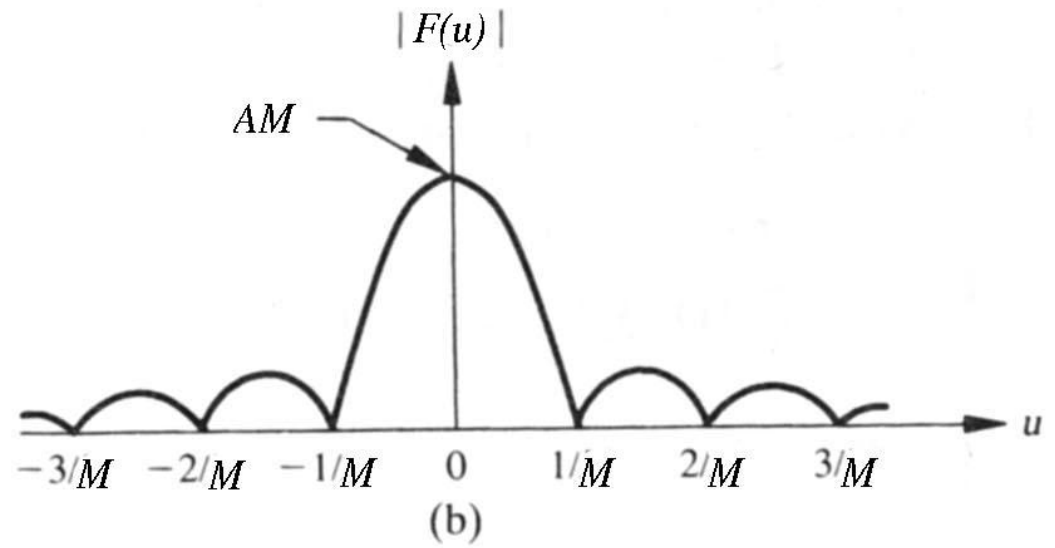
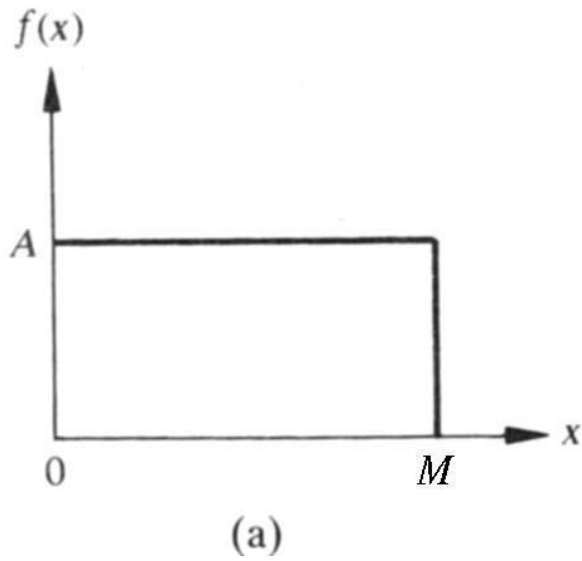
wobei  $|F(\omega)|$  Fourier-Spektrum oder auch Spektralverteilung genannt wird,  $\omega$  die Frequenzvariable,  $\Phi$  Phasenwinkel

Beispiel: sei  $f(t) = A$  im Bereich  $[0..M]$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt \\ &= \int_0^M f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt \\ &= \frac{A}{2\pi i\omega} [e^{-2\pi i\omega t}]_0^M = \frac{A}{2\pi i\omega} (e^{-2\pi i\omega M} - 1) \\ &= \frac{A}{2\pi i\omega} (e^{\pi i\omega M} - e^{-\pi i\omega M})e^{-\pi i\omega M} \\ &= \frac{A}{\pi\omega} \sin(\pi\omega M)e^{-\pi i\omega M} \end{aligned}$$



Ergebnis graphisch:



nach Gonzales, Woods: Digital Image Processing

Inverse Fouriertransformation:

$$f(t) = \int F(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega$$

→ d.h man hat es mit (fast) derselben Transformation zu tun

zweidimensionale Version der Fouriertransformation:

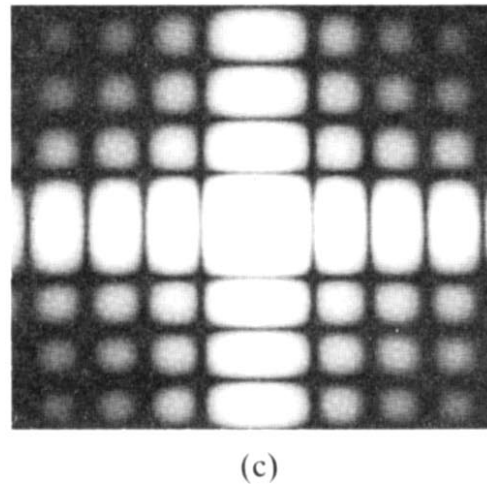
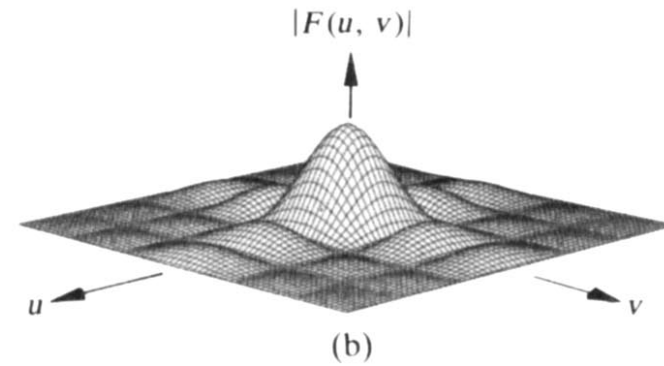
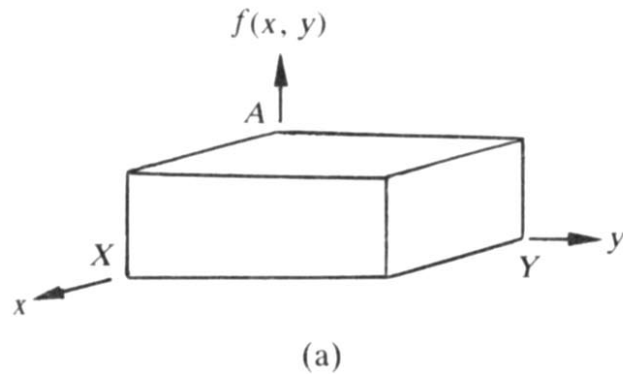
$$F(\omega, \nu) = \int \int f(t, s) e^{-2\pi i(\omega t + \nu s)} dt ds$$

bzw.

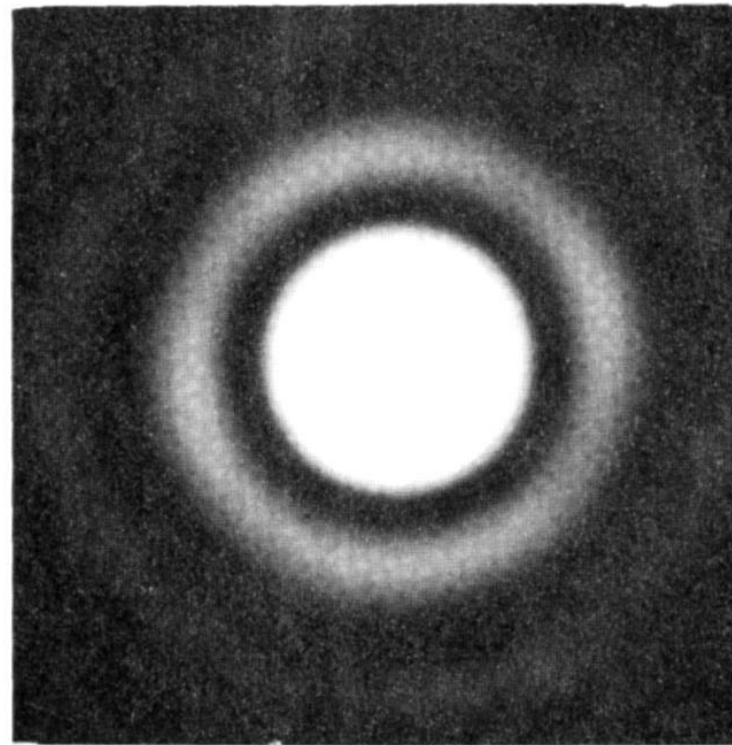
$$f(t, s) = \int \int F(\omega, \nu) e^{2\pi i(\omega t + \nu s)} d\omega d\nu$$

→ Power-Spektrum und Phasenwinkel analog oben

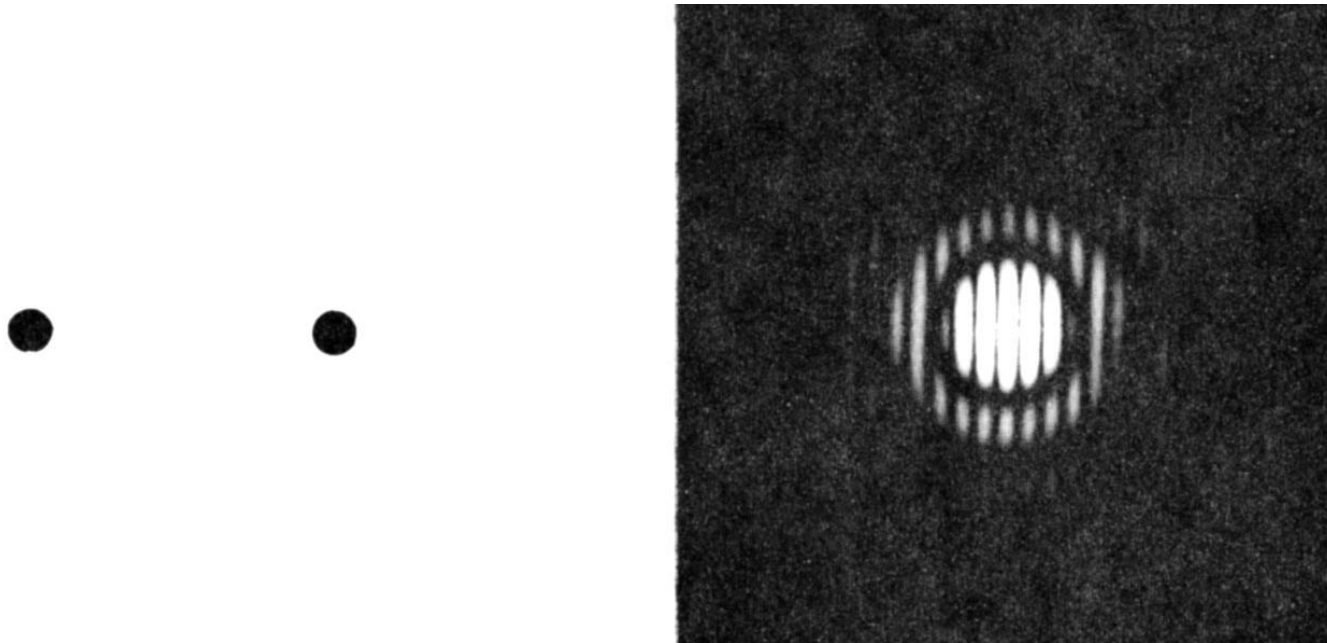
# Beispiel von 2D-Funktionen und deren Fouriertransformierten:



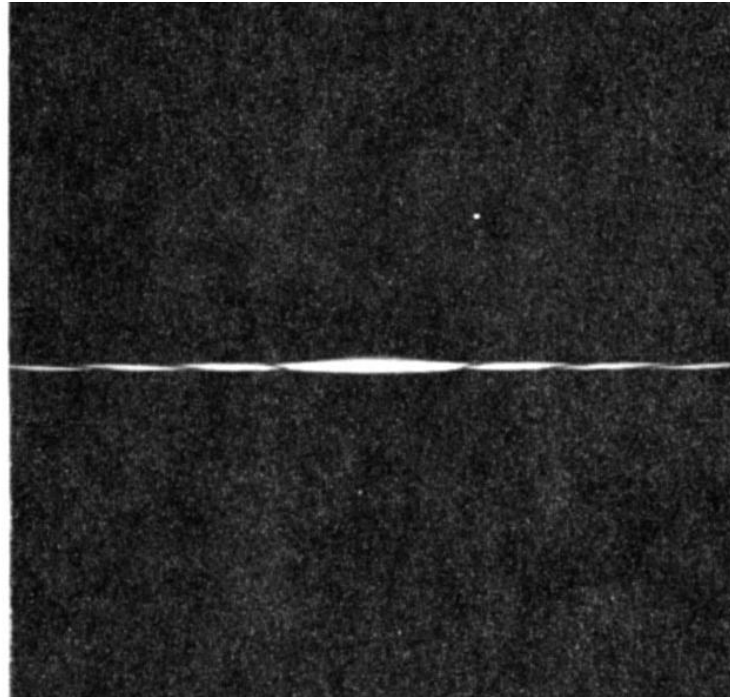
aus: Gonzales, Woods: Digital Image Processing



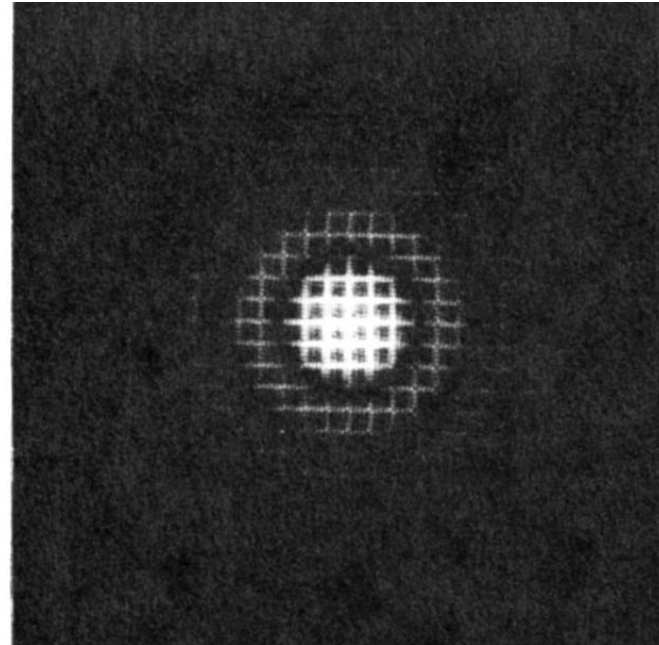
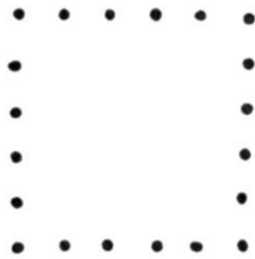
aus: Gonzales, Woods: Digital Image Processing



aus: Gonzales, Woods: Digital Image Processing

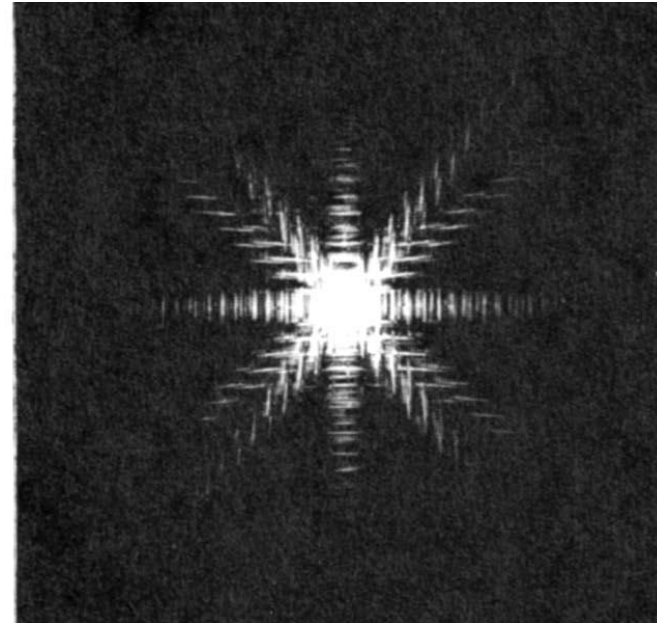
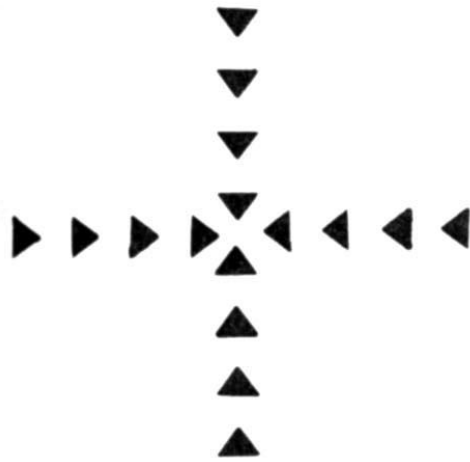


aus: Gonzales, Woods: Digital Image Processing

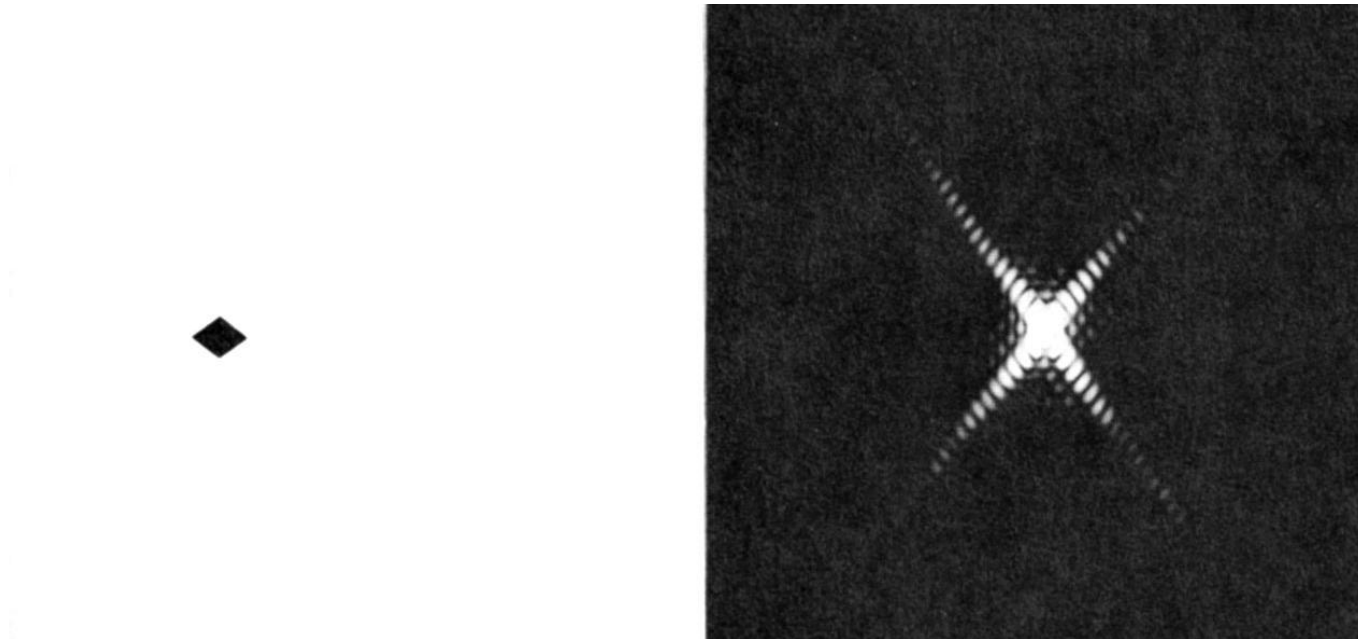


aus: Gonzales, Woods: Digital Image Processing





aus: Gonzales, Woods: Digital Image Processing



aus: Gonzales, Woods: Digital Image Processing

## Faltungseigenschaft der Fouriertransformation

Einer Faltung im Ortsraum entspricht eine elementweise Multiplikation im Frequenzraum und umgekehrt.

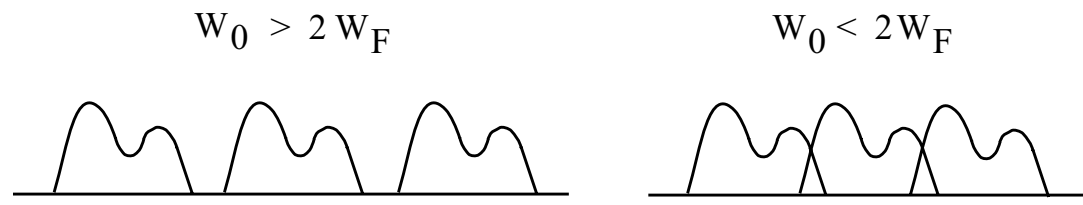
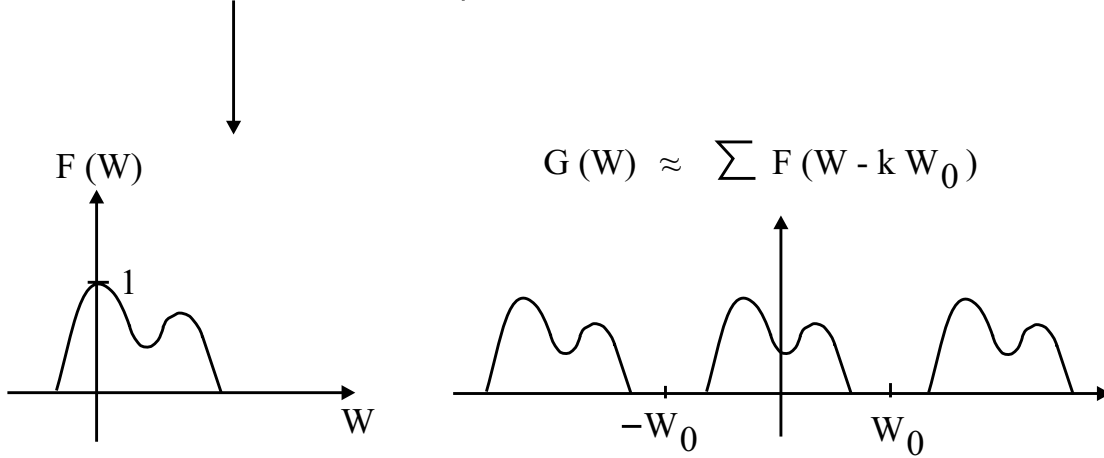
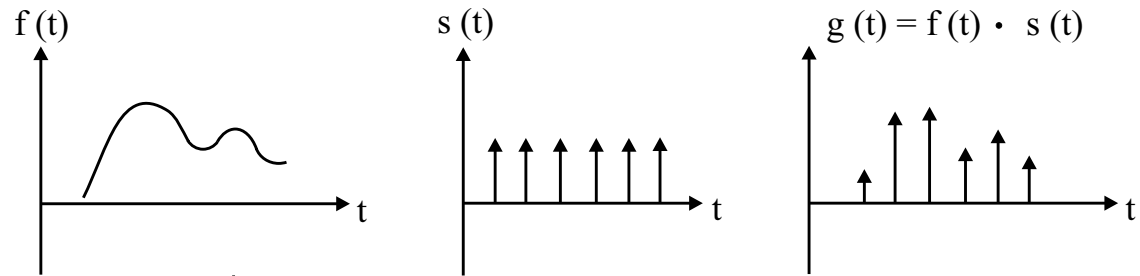
## Bandbegrenzung

Ist die Funktion genügend "glatt", so hat die Fouriertransformierte lokalen Support, also eine Grenzfrequenz  $\omega_F$ . Die Funktion ist in diesem Fall bandbegrenzt.

## Abtasttheorem:

Eine bandbegrenzte Funktion  $f(t)$  mit Grenzfrequenz  $\omega_F$  kann perfekt aus den Abtastwerten  $f(nT_0)$  rekonstruiert werden, wenn

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \geq 2 \omega_F$$



bei ungenügender Abtastung:

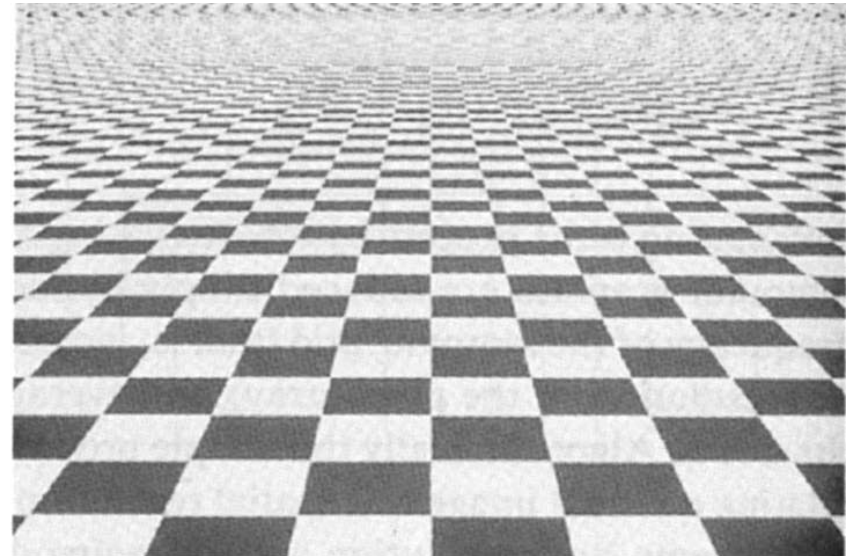
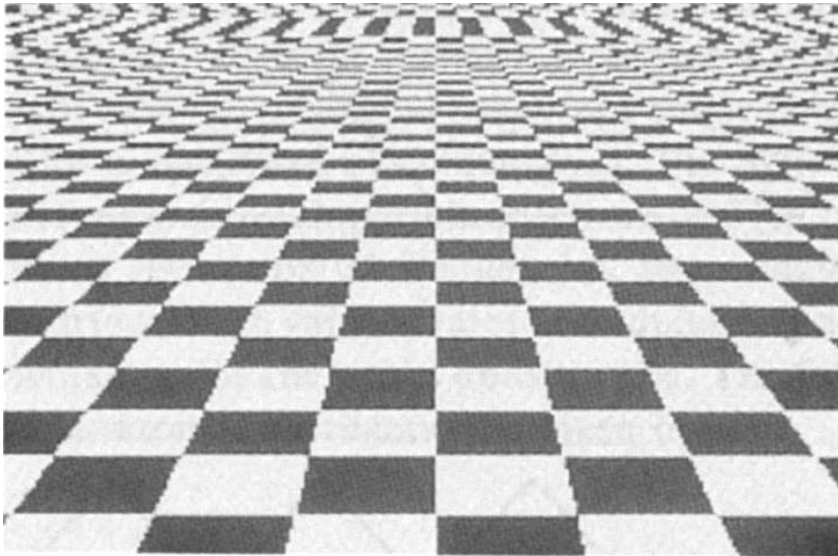
→ Überlappung der einzelnen Spektren erzeugt  
zusätzliche Frequenzen

⇒ Fehler in der Rekonstruktion

Hilfe:

Bandbegrenzung bestimmen, geeignet abtasten

**Antialiasing-Techniken**



- links: Alias-Artefakte durch Rekonstruktionsfehler  
(im Auge des Betrachters)
- rechts: Verminderung der Effekte durch Antialias