VII QUADRATISCHE FORMEN

Bisher haben wir uns nur mit linearen Ausdrücken in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ der Form $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ beschäftigt. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß sie die Variablen nur in den ersten Potenzen enthalten und dementsprechend nur lineare Abbildungen vom $K^n \to K$ hervorrufen. Nun wollen wir uns mit solchen Ausdrücken beschäftigen, die auch Produkte und Quadrate der Ausgangsvariablen enthalten: $ax^2 + bxy + cy^2$ oder allgemein

$$\mathrm{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{n-1}a_nx_{n-1}x_n}.$$

Sie induzieren ebenfalls Abbildungen vom $K^n \to K$, die man allgemein Formen nennt. Sie sind aber nicht mehr linear, trotzdem werden wir sehen, daß sie mit linearen Methoden, ja sogar mit symmetrischen Matrizen beschrieben werden können. Solche Ausdrücke werden in den verschiedensten Gebieten der Mathematik benötigt. In der Analysis z.B. zur Kennzeichnung von Maxima und Minima, in der Geometrie zur Beschreibung von "gekrümmten" Punktmengen (Kegelschnitte, Quadriken), auch in der Statistik möchte man wissen, wann solche Ausdrücke immer nur Werte ≥ 0 oder < 0 annehmen. Dazu werden wir lernen, wie man solche quadratische Ausdrücke vereinfachen, insbesondere die gemischten Terme x_ix_j entfernen kann ("Hauptachsentransformation") und welche Geometrie auf der durch sie beschriebenen Punktmengen möglich ist.

24 Bilinearformen und Quadratische Formen

Mit den zunächst naheliegenden Ausdrücken der Form $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ und den durch sie induzierten linearen Abbildungen, den **Linearformen**, *werden wir uns erst später beschäftigen. Sie traten bisher bei linearen Gleichungssystemen auf. Der weitere Ausbau ihrer Theorie und ihren Anwendungen erfolgt im Kapitel über Dualität in der Höheren Linearen Algebra.*

Vielmehr beschäftigen wir uns mit "quadratischen Formen" und zeigen, daß sie trotzdem mit linearen Methoden behandelt werden können. Das beruht darauf, daß sie ebenfalls mit Matrizen (sogar symmetrischen $\to$ Hauptsatz der Linearen Algebra) beschrieben werden können bzw. als Spezialfall von "bilinearen" Abbildungen aufgefaßt werden können, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$q(x_1, x_2) = 3x_1 + 8x_1x_2 + 25x_2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{x}^t A\vec{x}.$$

Setzt man in

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = 3x_1y_1 + 4x_2y_1 + 4x_1y_2 + 5x_2y_2$$

$x_1 = y_1$ *und* $x_2 = y_2$*, so erhält man:*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_1, x_2) &= 3x_1^2 + 4x_2x_1 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 3x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= q(x_1, x_2) \end{aligned}$$

f *ist dabei eine Abbildung von* $K^2 \times K^2 \to K$ *und* $q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$ *ebenfalls eine Abbildung vom* $K^2 \to K$.

24.1 Definitionen

Folgende Abbildungen wurden bisher untersucht:

1. **Vorschriften mit nur 1. Potenzen der Ausgangsvariablen $\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{x_1}, \ldots, \vec{\mathbf{x_n}})$**

Lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

Affine Abbildungen

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m \end{aligned}$$

$$\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$$

allgemein:

$f : V \to W$

$f(x) = y$

$f(kx + ly) = kf(x) + lf(y)$

f : Lineare Abbildung (Operator)

$\alpha : V \to W$

$\alpha(x) = f(x) + t, f$ linear

α : Lineare Abbildung + Translation

Spezialfall:

$y = a_1x_1 + \ldots + a_2x_n$

$y = \vec{a} \cdot \vec{x}$

$f : V \to K$

$f(\vec{x}) = k \in K$

f : Linearform

$y = a_1x_1 + \ldots + a_2x_n + b$

$y = \vec{a}^t \cdot \vec{x} + b$

$\alpha : V \to K$

$\alpha(\vec{x}) = k \in K$

α : Linearform + Konstante

2. **"Vorschriften" mit quadratischen und "gemischten" Termen der Ausgangsvariablen $\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$**

$y = ax^2 + bxy + cy^2$	$y = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$
$y = \vec{x}^t A\vec{x}$	$q : V \to K$
$q : V \to K$	$q(\vec{v}) = x^t A x^t + \vec{a} \cdot \vec{x} + f$
$y = q(\vec{x}) = x^t A x^t =< A\vec{x}, \vec{x} >=< x, A\vec{x} >$	Quadratische Form + Linearform +
Quadratische Formen	Konstante

allgemein:

$y = a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{1n}x_n^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j$	$q(\vec{x}) =< \vec{x}, A\vec{x} > + < \vec{a}, \vec{x} > +f$
$q(\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x}$	$y = \sum a_{ii}x_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_{ij} + \sum a_i x_i + c$

Allen Abbildungen ist gemeinsam: **Einem** Vektor $x \in V$ wird ein Skalar zugeordnet. Sie können durch Matrizen und Skalarprodukte beschrieben werden.

Nun wollen wir **zwei** und **mehr** Vektoren einem Skalar zuordnen.

Beispiel: $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_2y_2$

f kann nicht nur als eine Zuordnung von $K^4 \to K$, sondern auch als eine Zurodnung von $K^2 \times K^2 \to K$ aufgefaßt werden.

Setzt man $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$ und $\vec{y} = \binom{y_1}{y_2}$, dann gilt:

$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_2y_2 \in K$.

Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in K^2$ wird also ein Skalar $\in K$ zugeordnet. Auch diese Zuordnung kann vereinfacht mit einer Matrix angeschrieben werden:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{x}^t A\vec{y}$$

Dabei ist $\mathbf{a_{ij}}$ = **Koeffizient von $\mathbf{x_i x_j}$**.

Aufgrund der Matrixregeln erweist sich die Zuordnung als linear in den 2 Vektor–Variablen $\vec{x}, \vec{y}$, d.h., ersetzt man $\vec{x}$ durch $k\vec{x_1} + l\vec{x_2}$, dann passiert dasselbe mit den Funktionswerten:

$f(k\vec{x_1} + l\vec{x_2}, \vec{y}) = kf(\vec{x_1}, \vec{y}) + lf(\vec{x_2}, \vec{y})$ und analog

$f(k\vec{x} + k\vec{y_1}, l\vec{y_2}) = kf(\vec{x}, \vec{y_1}) + lf(\vec{x}, \vec{y_2})$, denn:

$f(k\vec{x_1} + l\vec{x_2}, \vec{y}) = (l\vec{x_1} + l\vec{x_2})^t A\vec{y} = (k\vec{x_1}^t + l\vec{x_2}^t)A\vec{y} = k\vec{x_1}^t A\vec{y} + l\vec{x_2}^t A\vec{y} = kf(\vec{x_1}, \vec{y}) + lf(\vec{x_2}, \vec{y})$.

Natürlich kann man dies auch in den Koordinaten nachrechnen.

Übrigens ist $f(\vec{x},\vec{y}) \neq f(\vec{y},\vec{x})$.

Setzt man in $f(\vec{x},\vec{y})$ $\vec{y}=\vec{x}$, so erhält man:

$f(\vec{x},\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x} = x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2x_1 + 4x_2^2 = x_1^2 - x_2x_1 + 4x_2^2 = q(\vec{x})$

$f(\vec{x},\vec{x})$ ist also eine quadratische Form in x_1, x_2.

Beispiel: Auch das Skalarprodukt ist eine Zuordnung, die 2 Vektoren einen Skalar zuordnet:

$$f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \in K$$

Ersetzt man auch hier $\vec{x}$ durch $k\vec{x_1} + l\vec{x_2}$, so erhält man:

$$f(k\vec{x_1} + l\vec{x_2},\vec{y}) = (k\vec{x_1} + l\vec{x_2})\cdot\vec{y} = k\vec{x_1}\cdot\vec{y} + l\vec{x_2}\cdot\vec{y} = kf(\vec{x_1},\vec{y}) + lf(\vec{x_2},\vec{y})$$

Dasselbe gilt bei der Ersetzung von $\vec{y}$ durch $k\vec{y_1} + l\vec{y_2}$. Man sagt: Die Zuordnung ist linear in der ersten und zweiten (Vektor)variablen.

Es ist darüber hinaus: $f(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{y},\vec{x})$.

Beispiel: Beim komplexen Skalarprodukt gilt die Linearität bezüglich der zweiten Variablen nicht mehr ganz:

$f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}\cdot\overline{y} = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n} \Rightarrow$
$f(\vec{x}, k\vec{y_1} + l\vec{y_2} = \vec{x}\overline{(k\vec{y_1} + l\vec{y_2})} = \vec{x}\cdot\overline{k\vec{y_1}} + \overline{l\vec{y_2}} = \overline{k}(\vec{x}\cdot\overline{\vec{y_1}}) + \overline{l}(\vec{x},\overline{\vec{y_2}}) = \overline{k}f(\vec{x},\vec{y_1}) + \overline{l}(\vec{x},\vec{y_2})$.

Man sagt: f ist bezüglich der 2. Variablen nur similinear.

Definition 24.1 Semibilinearformen und quadratische Formen

V sei ein Vektorraum über dem Körper K. Für $k \in \mathbb{C}$ bezeichne $\overline{k}$ die konjugierte-komplexe Zahl zu k.

(i) *Eine Abbildung $f : V \times C \to K = \mathbb{C}$ heißt eine* **Semibilinearform auf** *V, wenn für alle $k, l \in K$ und alle $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$ gilt:*

(SB 1) $\mathbf{f(kx_1 + lx_2, y) = kf(x_1, y) + lf(x_2, y)}$

f ist linear in der ersten Variablen.

(SB 2) $\mathbf{f(x, ky_1 + ly_2) = \overline{k}f(x, y_1) + \overline{l}f(x, y_2)}$

f ist semilinear in der zweiten Variablen.

(ii) *Eine Abbildung* $f : V \times V \to K$ *heißt* **Bilinearform** *auf* V*, wenn für alle* $k, l \in K$ *und alle* $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$ *gilt:*

(B1) $\mathbf{f(kx_1 + lx_2, y) = kf(x_1, y) + lf(x_2, y)}$

(B2) $\mathbf{f(x, ky_1 + ly_2) = kf(x, y_1) + lf(x, y_2)}$

f ist in beiden Variablen linear.

Beachte: *Für* $K = \mathbb{C}$ *gibt es Semibilinear-* **und** *Bilinearformen.*

(iii) *Eine Abbildung* $f : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{\text{n mal}} \to K$ *heißt* **Multilinearform** *auf* V*, wenn für alle* $k, l \in K$ *und alle* $x_i, x_{i1}, x_{i2} (i = 1, \ldots, n)$ *gilt:*

$$\mathbf{f(\ldots, kx_{i_1} + lx_{i_2}, \ldots) = kf(\ldots, x_{i_1}, \ldots) + lf(\ldots, x_{i2}, \ldots)}$$

f ist in jeder Variablen linear.

(iv) *eine Semibilinearform* f *auf* V *heißt* **hermitesch**, *wenn für alle* $x, y \in V$ *gilt:*

$$\mathbf{f(x, y) = \overline{f(y, x)}}$$

(v) *Eine Bilinearform* f *auf* V *heißt* **symmetrisch**, *wenn für alle* $x, y \in V$ *gilt:*

$$\mathbf{f(x, y) = f(y, x)}$$

Für $K = \mathbb{R}$ *ist jede symmetrische auch eine hermitesche Semibilinearform.* f *heißt auch eine reell-symmetrische Bilinearform.*

(vi a) *Eine Semibilinearform* f *heißt* **schiefhermitesch**, *wenn für alle* $x, y \in V$ *gilt:*

$$\mathbf{f(x, y) = -f(y, x)}$$

(vi b) *Eine Bilinearform (bzw. eine Multilinearform)* f *auf* V *heißt schiefsymmetrisch, wenn für alle* $x, y \in V$ *gilt:*

$$\mathbf{f(x, y) = -f(y, x) \text{ bzw. } f(\ldots, x, \ldots, y, \ldots) = -f(\ldots, y, \ldots, x, \ldots)}$$

(vi c) *eine Bilinearform (bzw. eine Multilinearform)* f *auf* V *heißt* **alternierend**, *wenn für alle* $x \in V$ *gilt:*

$$\mathbf{f(x, x) = 0 \text{ bzw. } f(\ldots, x, \ldots, x, \ldots) = 0}$$

(vii) eine Abbildung $h : V \to K = \mathbb{C}$ *heißt eine* **hermitesche Form auf V**, *wenn es eine hermitesche Semibilinearform* $f : V \times V \to \mathbb{C}$ *gibt, mit*

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \ \forall x \in V.$$

Hermitesche Formen nehmen nur reelle Zahlen als Werte an:

$$f(x) = f(x, x) = \overline{f(x, x)} = \overline{h(x)} \Rightarrow h(x) \in \mathbb{R}.$$

(viii) Eine Abbildung $q : V \to \mathbb{R}$ *heißt eine* **quadratische Form auf V**, *wenn es eine symmetrische Bilinearform* $f : V \times V \to \mathbb{R}$ *gibt, mit*

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \ \forall x \in V.$$

f *heißt* **Polarform** *zur quadratischen Form* q.

(ix) Eine hermitesche bzw. quadratische Form $q(x)$ *heißt*

positiv definit	$\Leftrightarrow$	$q(x) > 0 \ \forall x \neq 0$
positiv semidefinit	$\Leftrightarrow$	$q(x) \geq 0 \ \forall x$
negativ definit	$\Leftrightarrow$	$q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$
negativ semidefinit	$\Leftrightarrow$	$q(x) \leq 0 \ \forall x$
indefinit	$\Leftrightarrow$	$q(x) > 0 \ \forall x > 0$ *und* $\exists y : q(y) < 0$.

Beachte: Quadratische Formen haben wir nun nicht über den "vagen" Ausdruck gemischte und quadratische Terme definiert, sondern über symmetrische Bilinearformen. Das geht auch in abstrakten Vektorräumen.

Elementare Eigenschaften:

1. Allen "Formen" ist gemeinsam: Sie sind Abbildungen in den Skalarkörper K eines Vektorraumes. Neuerdings heißen solche Abbildungen auch **Funktionale**, insbesondere lineare Abbildungen $f : V \to K$.

2. Ist $\mathbf{char(K) \neq 2}$ (wie z.B. für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$), dann ist jede alternierende Multilinearform schiefsymmetrisch und umgekehrt:

a) Sei $f(\ldots x \ldots x \ldots) = 0 \Rightarrow$

$0 = f(\ldots x + y \ldots x + y \ldots) = f(\ldots x \ldots x \ldots) + f(\ldots x \ldots y) + f(\ldots y \ldots x \ldots) +$

$f(\ldots y \ldots y \ldots) = f(\ldots x \ldots y \ldots) + f(\ldots y \ldots x \ldots)$

(b) Sei $f(\ldots x \ldots y \ldots) = -f(\ldots y \ldots x \ldots) \Rightarrow f(\ldots x \ldots x \ldots) = -f(\ldots x \ldots x \ldots) \Rightarrow$

$2f(\ldots x \ldots x \ldots) = 0 \Rightarrow f(\ldots x \ldots x \ldots) = 0$ wenn $char(K) \neq 2$.

Eine quadratische Form $q : V \to K$ erhält man durch $q(x) := f(x, x)$ aus einer symmetrischen Bilinearform.

3. Ist $\mathbf{char(K) \neq 2}$, dann kann umgekehrt jede symmetrische Bilinearform durch ihre dazugehörige quadratische Form dargestellt werden:

$$\mathbf{f(x,y) = \frac{1}{2}(q(x,y) - q(x) - 1(y))} : \textbf{Polarform von f.}$$

Ist $q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$, dann ist die Polarform f von q gegeben durch:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}^t \frac{A^t + A}{2} \vec{x}$$

Für quadratische Formen gilt weiters:

$q(0) = 0$

$q(x) = q(-x)$

$q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y))$

Parallelogrammgleichung für quadratische Formen.

Analog kann eine hermitesche Semibilinearform f durch ihre hermitesche Form h polar dargestellt werden:

$$\mathbf{f(x,y) = \frac{1}{4}(h(x+y) - h(x-y)) + \frac{1}{4}(h(x+iy) - h(x-iy))}$$

Für hermitesche Semibilinearformen gilt darüber hinaus für alle $x, y \in V$:

$$\mathbf{Re[f(x,y)] = \tfrac{1}{2}(f(x+y, x+y) - f(x,x) - f(y,y))}$$
$$\mathbf{Im[f(x,y)] = \tfrac{1}{2}(f(x+iy, x+iy) - f(x,x) - f(y,y))}$$

Fundamentale Beispiele von Formen

1. (a) **Jede $\mathbf{n \times n}$–Matrix $\mathbf{A = (a_{ij})}$ über K definiert eine Bilinearform auf $\mathbf{K^n}$** durch:

$$\mathbf{f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}^t A \vec{x} = (y_1, \ldots, y_n} \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + \ldots + a_{nn} x_n y_n}.$$

Der formale Ausdruck von $f(\vec{x}, \vec{y})$ ist also ein Polynom $\in K[X, Y]$, es heißt das zur Matrix A gehörige **bilinear Polynom**.

Die Bilinearität folgt aus den Matrixregeln.

(b) **Jede $\mathbf{n \times n}$–Matrix über $\mathbb{C}$ definiert durch $\mathbf{f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}^* A \vec{x}}$ eine Semibilinearform auf $\mathbb{C}^n$.**

(c) Jede symmetrische $n \times n$–Matrix X definiert durch $q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$ eine symmetrische Bilinearform auf K^n.

$q(\vec{x}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = \sum_i a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$

(d) Jede hermitesche $n \times n$–Matrix A definiert durch $q(\vec{x}) = \vec{x}^* A \vec{x}$ eine hermitesche Form auf $\mathbb{C}^n$.

2. Jedes **reelle Skalarprodukt** $f(x, y) = < x, y >$ ist eine **symmetrische Bilinearform**, deren zugehörige quadratische Form $q(x) = (x, x)$ positiv definit ist.

$f(x, y) = x_1 x_1 + \ldots + x_n x_n = x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0$ für $x \neq 0$.

Jedes **komplexe Skalarprodukt** $f(x, y) = < x, y >$ ist eine **hermitesche Semibilinearform**, deren zugehörige hermitesche Form $h(x) = f(x, x)$ positiv definit ist.

$f(x, x) = x_1 \overline{x_1} + \ldots + x_n \overline{x_n} = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 > 0$ für $x \neq 0$.

3. Jede Determinante $det(A)$ ist eine alternierende Multilinearform iherer Zeilenvektoren: $f(\vec{z_1}, \ldots, \vec{z_n}) = det(A)$ mit der zusätzlichen Normierungseigenschaft:

$$f(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}) = |I_n| = 1.$$

4. $f, g : V \to K$ seien linear.

Dann ist $f(x, y) := f(x) \cdot g(y)$ eine Bilinearform auf V.

5. $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$. $V = C[a, b]$, $x(t), y(t) \in C[a, b]$.
   $f(x, y) := \int_a^b x(t)y(t)dt \in \mathbb{R}$ ist eine symmetrische Bilinearform.

So wie die lineare Abbildung $f, g : V \to W$ bezüglich der punktweisen Addition $f + g$ und Vielfachen kf einen Vektorraum Hom $(V, W) = L(V, W)$ bilden, gilt dies auch für die Bilinearformen:

$$(f + g)(x, y) := f(x, y) + g(x, y)$$
$$(kf)(x, y) := kf(x, y)$$

Satz 24.1 *Die Menge $B(V)$ der Bilinearformen auf V bildet einen Vektorraum über K.*

24.2 Matrixdarstellung von Bilinearformen

So wie für lineare Abbildungen gibt es auch für Bilinearformen eine bijektive Zuordnung zu den Matrizen, verantwortlich dafür ist die Linearität in den beiden Variablen.

Sei f eine Bilinearform auf V und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V. Ist $x = x_1b_1 + \ldots + x_nb_n$ und $y = y_1b_1 + \ldots + y_nb_n$, dann ist, so wie bei linearen Abbildungen, das Bild $f(x, y)$ durch die Bilder der Basisvektorpaare $f(b_i, b_j)$ eindeutig festgelegt:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= f(x_1b_1 + \ldots + x_nb_ny_1b_1 + \ldots + y_nb_n) = \\
&= x_1f(b_1, y_1b_1 + \ldots + y_nb_n) + \ldots + x_nf(b_n, y_1b_1 + \ldots + y_nb_n) = \\
&= x_1y_1f(b_1, b_1) + x_1y_2f(b_1, b_2) + \ldots + x_1y_nf(b_1, b_n) + \\
&\quad +x_2y_1f(b_2, b_1) + x_2y_2f(b_2, b_2) + \ldots + x_2y_nf(b_2, b_n) + \\
&\quad \ldots \\
&\quad +x_ny_1f(b_n, b_1) + x_ny_2f(b_n, b_2) + \ldots + x_ny_nf(b_n, b_n) = \\
&= \textstyle\sum_{i,j=1}^n x_iy_jf(b_i, b_j).
\end{aligned}$$

Versammelt man diese Bilder der Basisvektorpaare $f(b_i, b_j)$ in einer Matrix $A := [f]_B = (f(b_i, b_j))$, dann gilt:

$$\mathbf{f(x, y) = \sum x_iy_if(b_i, b_j) = (y_1, \ldots, y_n)A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{[y]_B^t A [x]_B}$$

Definition 24.2 Matrixdarstellung

f sei eine Bilinearform auf V mit der Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Die Matrix $[f]_B := (f(b_i, b_j))$ heißt **Matrixdarstellung** *von f bezüglich der Basis B oder* **Formmatrix von f**.

Satz 24.2 Matrixdarstellung von Bilinearformen

(i) Ist $[f]_B$ die Matrixdarstellung von f dann gilt:

$$\mathbf{f(x,y) = [y]_B^t[f]_B[x]_B}$$

Für eine feste Basis B ist $[f]_B$ eindeutig bestimmt.

(ii) Die Zuordnung $f \to [f]_B$ ist ein Vektorraumisomorphismus von $B(V)$ auf $K^{n \cdot n}$, d.h.,

$$\mathbf{[f+g]_B = [f]_B + [g]_B, \quad [kf]_B = k[f]_B}$$

(iii) f hermitesch $\Rightarrow$ $[f]_B$ hermitesch
f symmetrisch $\Rightarrow$ $[f]_B$ symmetrisch
f schiefsymmetrisch $\Rightarrow$ $[f]_B$ schiefsymmetrisch

(iv) Ist P die Übergangsmatrix von der Basis B zur Basis B', dann gilt für die neue Matrixdarstellung:

$$\mathbf{[f]_{B'} = P^t[f]_B P}$$
$$\mathbf{[f]_{neu} = P^t \cdot [f]_{alt} \cdot P}$$

Die Matrixdarstellungen einer Bilinearform sind also untereinander kongruent.

Beweis von (iii):
$f(x,y) = [y]^t[f][x] = ([y]^t[f][x])^t =$
$= [x]^t[f]^t[y]^{tt} = [x]^t[f]^t[y]$
Ist f symmetrisch $\Rightarrow [y]^t[f]^t[x] = f(x,y) = f(y,x) = [y]^t[f][x]$ für alle $x, y \Rightarrow [f]^t = [f]$.

Beweis von (iv):
$f(x,y) = [y]_B^t[f]_B[x]_B = (P[y]_{B'})^t[f]_B(P[y]_{B'}) = [y]_{B'}(P^t[f]_BP)[x]_{B'}$.

Wegen der Eindeutigkeit ist $[f]_{B'} = P^t[f]_BP$.

Die neue Matrixdarstellung einer Bilinearform unterscheidet sich also von der alten einfach dadurch, daß man diese von rechts mit P und links mit P^t multipliziert. (Kongruente Matrizen nach Definition 21.2.)

Jeder quadratischen Form q auf V ist genau eine symmetrische Bilinearform f auf V zugeordnet. Ist $dim(V) = n$ dann ist bezüglich einer festen Basis B von V diesem f genau eine symmetrische $n \times n-$Matrix zugeordnet. Damit kann man auch jeder quadratischen Form q bezüglich einer festen Basis B von V genau eine symmetrische $n \times n-$Matrix als **Formmatrix** $[q]$ von g zuordnen: **Die Formmatrix $[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}}$ einer quadratischen Form q ist die Formmatrix ihrer Polarform f: $[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}} = [\mathbf{f}]_{\mathbf{B}}$.**

Umgekehrt definiert jede symmetrische $n \times n-$Matrix A eine quadratische Form auf V durch

$$q(x) = [x]_B^t A[x]_B.$$

Ähnliches gilt für hermitesche Formen und hermitesche Matrizen.

Satz 24.3 Formmatrizen von quadratischen Formen

V sei ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

(i) Für $K = \mathbb{R}$ gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen quadratischen Formen und symmetrischen $n \times n-$Matrizen.

(ii) Für $K = \mathbb{C}$ gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen hermiteschen Formen und hermiteschen $n \times n-$Matrizen.

(iii) Die Formmatrizen einer quadratischen Form sind untereinander kongruent.

(iv) Für $V = \mathbb{R}^n$ gilt speziell: Ist $q(\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x}$, dann ist die Polarform $f(\vec{x}, \vec{y})$ von $q(\vec{x})$ gegeben durch

$$\mathbf{f}(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) = \vec{\mathbf{y}}^{\mathbf{t}} \frac{\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + \mathbf{A}}{\mathbf{2}} \vec{\mathbf{x}},$$

also ist $\frac{1}{2}(\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + \mathbf{A})$ die **Formmatrix von q**.

Beachte: $\frac{1}{2}(A^t + A)$ ist stets symmetrisch.

Beweis von (iii):

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{y}) &= \tfrac{1}{2}(q(\vec{x} + \vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y}) = \\ &= \tfrac{1}{2}((\vec{x}^t + y)^t A(\vec{x} + \vec{y}) - \vec{x}^t A\vec{x} - \vec{y}^t A\vec{y}) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\vec{x}^t A\vec{y} + \vec{y}^t A\vec{x}) = \\ &= \tfrac{1}{2}[(\vec{x}^t A\vec{y})^t + \vec{y}^t A\vec{x}] = \\ &= \tfrac{1}{2}(\vec{y}^t A^t\vec{x} + \vec{y}^t A\vec{x}) = \vec{y}^t \tfrac{A^t + A}{2} \vec{x}. \end{aligned}$$

Beispiel: $q(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & +3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 + 3x_3^2 - 4x_1x_3$

Polarform $f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}^t \frac{A^t+A}{2} \vec{x} = (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ ist die (symmetrische) Formmatrix von q.

Probe: $q(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_1x_3.$

Orthogonal ähnliche Matrizen sind wegen $P^{-1} = P^t$ auch kongruent. Kongruente Matrizen sind auch äquivalent (aber nicht umgkehrt), damit besitzen **kongruente Matrizen gleichen Rang** und es ist folgende Definition möglich:

Definition 24.3 Ausgeartete und nicht ausgeartete Bilinerform

(i) f sei eine Bilinearform auf dem Vektorraum V. Der Rang einer Bilinearform ist der Rang irgendeiner Matrixdarstellung von f : $rg(f) = rg([f]_B)$.

f heißt **nicht ausgeartet** $\Leftrightarrow rg(f) = dim(V)$.

f heißt **ausgeartet** $\Leftrightarrow rg(f) < dim(V)$.

(ii) Der Rang einer quadratischen (hermiteschen) Form ist der Rang ihrer Formmatrix.

24.3 Kongruentes Diagonalisieren

Aufgrund von 24.3 sind Aussagen über quadratische Formen zugleich auch Ausagen über symmetrische Matrizen. Dazu behandeln wir so wie bei linearen Operatoren die Frage nach der einfachsten Darstellung bezüglich Kongruenztransformationen.

Satz 24.4 Diagonalform quadratischer Formen

V sei ein Vektorraum über dem Körper K mit $char(K) \neq 2$. Zu jeder quadratischen Form $q(x)$ auf V gibt es eine Basis von V, bezüglich der die Formmatrix von q eine Diagonalmatrix ist.

Matrizentheoretisch *formuliert:*

K sei ein Körper mit $char(K) \neq 2$. Zu jeder symmetrischen $n \times n-$Matrix A über K existiert eine reguläre Matrix P mit $P^t A P = D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Also: Jede symmetrische Matrix ist zu einer Diagonalmatrix kongruent.

Beachte: Die Diagonalelemente sind keine EW von A. Man erhält P auch ohne die (schwierige) Eigenwertberechnung, sondern nur durch **Kongruenztransformationen**:

1. $V(p, q)$ bezeichne das Vertauschen der $p-$ten Spalte mit der $q-$ten Spalte **und** die Vertauschung der $p-$ten Zeile mit der $q-$ten Zeile.

2. $U(p, q, k)$ bezeichne die Addition des $k-$fachen der $q-$ten Spalte zur $p-$ten Spalte **und** die Addition des $k-$fachen der $q-$ten Zeilen zur $p-$ten Zeile.

Weil A symmetrisch ist, führt man immer Zeilen- und Spaltenoperation gleichzeitig aus, allerdings nur mit den Halbe–fachen des entsprechenden Matrixelementes. Treten während des Vorganges einmal in der Hauptdiagonale nur mehr Nullen auf, muß man ein $a_{qp} \neq 0$ auf eine Diagonalstelle bringen.

Statt eines Beweises wird nur das Verfahren illustriert: Schreibe A und I_n nebeneinander auf. Versuche A auf Diagonalgestalt zu bringen und wende auf I_n **nur** die entsprechenden **Spaltenumformungen** an. Die Matrix, die aus I_n entsteht, ist die gesuchte Transformationsmatrix P, also:

$$(A/I_n) \rightarrow (D/P)$$

$$\begin{array}{rrrr c rrrr} & A & & & & & B & & \\ 1 & -2 & 3 & -1 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & 1 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 9 & -1 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Es wird addiert: Das 2–fache der 1. Spalte zur 2., das $(-3)-$fache der 1. Spalte zur 3., das 1–fache der 1. Spalte zur 4. Spalte.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Alle Diagonalelemente der Restmatrix verschwinden. Es wird addiert: Das $\frac{1}{2}$–fache der 3. Spalte zur 2. Spalte.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{2} & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Es wird addiert: Das (-1)–fache der 2. Spalte zur 3. und dann das 2–fache der 3. Spalte zur 4. Spalte.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ & P^tAP & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & P & \end{array}$$

Für reelle ($K = \mathbb{R}$) und komplexe ($K = \mathbb{C}$) Vektorräume erhält man noch speziellere Formmatrizen, nämlich solche, die nur $+1, (-1)$ und 0 in der Hauptdiagonale enthalten. Beachte, daß hermitesche Formen nur reelle Funktionswerte annehmen.

Satz 24.5 Normalformen quadratischer (hermitescher) Formen.

Abbildungstheoretische *Formulierung: V sei ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$. q bzw. h sei eine quadratische bzw. hermitesche Form auf V. Dann gibt es eine Basis von V, bezüglich der q bzw. h eine Diagonalmatrix der Form*

$$D = diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$$

als Formmatrix besitzen.

Matrizentheoretische *Formulierung: Sei $K = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.*

Zu jeder reell–symmetrischen bzw. hermiteschen Matrix über K existiert eine reguläre Matrix P mit

$$P^t A P = diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0).$$

Oder: Jede reell–symmetrische bzw. hermitesche Matrix ist zu einer Diagonalmatrix aus $+1, -1$ und 0 kongruent.

Zum Beweis: Es gibt eine Transformation auf $diag(d_1, \ldots, d_n)$. Weil in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ Quadratwurzeln existieren, kann man durch Diagonalmatrizen, in denen $k_i = \frac{1}{\sqrt{|d_i|}}$ für $d_i \neq 0$ und sonst 1 steht, auf die gewünschte Form kommen.

Beispiel: Zu einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{(4,4)}$ wird durch Kongruenztransformationen eine Diagonalmatrix $P^T A P$ und **gleichzeitig** aus der Einheitsmatrix I mittels **derselben** Spaltenumformungen die Transformationsmatrix P konstruiert. Nur die Spaltenumformungen sind erläutert.

$$\begin{array}{cccc} & A & & \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & \frac{25}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & I_n & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Es wird addiert: Das $(-\frac{3}{2})$–fache der 1. Spalte zur 2., das $\frac{1}{2}$–fache der 1. Spalte zur 3. und das (-2)–fache der 1. Spalte zur 4. Spalte.

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -\frac{7}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Es wird addiert: Das 3–fache der 2. Spalte zur 3. und das (-2)–fache der 2. Saplte zur 4. Spalte.

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & -\frac{3}{2} & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Es wird multipliziert: Die 1. Spalte mit $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, die 2. Spalte mit $\sqrt{2}$ und die 3. Spalte mit $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & P^tAP & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{3}{2}\sqrt{2} & -2 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{3}{2} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & P & & \end{array}$$

Die Anzahl der nichtverschwindenden Diagonalelemente in der kongruenten Normalform von A ist der Rang von A. $rg(A) = r$ ist für alle kongruenten Matrizen, weil sie auch äquivalent sind, immer gleich. Interessant ist, daß auch die Anzahl der **positiven Diagonalelemente** und damit die der negativen und der Nullen für kongruente Matrizen **stets** gleich groß ist. Das ist die Aussage des **Trägheitsgesetzes**:

Satz 24.6 Trägheitsgesetz von SYLVESTER

V sei ein $n-$dimensionaler Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$. $q : V \to \mathbb{R}$ bzw. $h : V \to \mathbb{C}$ sei eine quadratische bzw. hermitesche Form auf V. Dann gilt:

Alle Formmatrizen von q bzw. h haben stets **dieselbe Anzahl** *von $+1, -1$ und 0.*

Ohne Beweis.

Dieser Satz ermöglicht folgende Defintion:

Definition 24.4 Index einer Matrix

Der **Index** *$j(A)$ einer symmetrischen bzw- hermiteschen Matrix A ist die Anzahl ihrer positiven Diagonalelemente in einer kongruenten Normalform.*

Mit dem Trägheitsgesetz gilt dann:

Satz 24.7 Charakterisierung von Kongruenz

Zwei quadratische Matrizen sind genau dann kongruent, wenn sie gleichen Rang **und** *gleichen Index haben.*

$$B \sim_4 A \Leftrightarrow rg(A) = rg(B) \text{ und } Index\,(A) = Index\,(B).$$

Aus dem Diagonalisierungssatz ergibt sich ein weiteres Kriterium für die positive Definitheit von quadratischen Formen bzw. symmetrischen Matrizen (neben dem Hauptminorenkriterium bzw. Eigenwertkriterium), nämlich:

Satz 24.8 3. Definitheitskriterium

V sei ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem angeordneten Körper K und q eine quadratische Form auf V. q ist genau dann positiv definit, wen q eine Formmatrix in Diagonalform mit lauter positiven Diagonalelementen besitzt.

Ähnliches gilt für die anderen Definitheitseigenschaften.

Matrizentheoretisch formuliert:

Eine symmetrische Matrix über einem angeordneten Körper K ist genau dann positiv definit, wenn sie kongruent zu einer Diagonalmatrix mit lauter positiven Diagonalelementen ist.

Da alle Formmatrizen von quadratischen Formen untereinander kongruent sind, sind die Definitheitseigenschaften invariant gegenüber Kongruenztransformationen.

Obigen Satz kann man auch so formulieren:

Satz 24.9 *Eine quadratische Form auf einem* n*-dimensionalen Vektorraum ist genau dann positiv definit, wenn ihr Rang und ihr Index beide* **gleich n** *sind. Sie ist genau dann positiv semidefinit, wenn ihr Rang und ihr Index gleich sind.*

Analoges gilt für hermitesche Formen und Matrizen über $\mathbb{C}$.