Theorie der Informatik

17. Entscheidbarkeit, Reduktionen, Halteproblem

Malte Helmert Gabriele Röger

Universität Basel

29. April 2015

Überblick: Vorlesung

Vorlesungsteile

I. Logik ✓

II. Automatentheorie und formale Sprachen ✓

III. Berechenbarkeitstheorie

IV. Komplexitätstheorie

Überblick: Berechenbarkeitstheorie

III. Berechenbarkeitstheorie

13. Turing-Berechenbarkeit ✓
14. LOOP-, WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit ✓
15. primitive Rekursion und μ-Rekursion ✓
16. Ackermannfunktion ✓
17. Entscheidbarkeit, Reduktionen, Halteproblem
18. Postsches Korrespondenzproblem

~~Unentscheidbare Grammatik-Probleme~~

~~Gödelscher Satz und diophantische Gleichungen~~

Nachlesen

Literatur zu diesem Vorlesungskapitel

Theoretische Informatik - kurz gefasst
von Uwe Schöning (5. Auflage)

- Kapitel 2.6

(Semi-) Entscheidbarkeit und rekursive Aufzählbarkeit

Berechenbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- Letzte Vorlesungen: Berechenbarkeit von Funktionen
- Jetzt: analoges Konzept für Sprachen

Warum Sprachen?

- nur Ja/Nein-Fragen („Ist $w \in L$?“)
  statt allgemeiner Funktionsberechnungen („Was ist $f(w)$?“)
  macht es einfacher, Fragestellungen zu untersuchen
- Ergebnisse sind auf allgemeineres Problem
  der Berechnung von Funktionen direkt übertragbar

Entscheidbarkeit

Definition (Entscheidbarkeit)

Eine Menge (Sprache) $A \subseteq \Sigma^*$ heisst entscheidbar, falls die charakteristische Funktion von A, nämlich $\chi_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$, berechenbar ist.

Hierbei ist für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\chi_A(w) := \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ 0 & \text{falls } w \notin A \end{cases}$$

Entscheidbarkeit

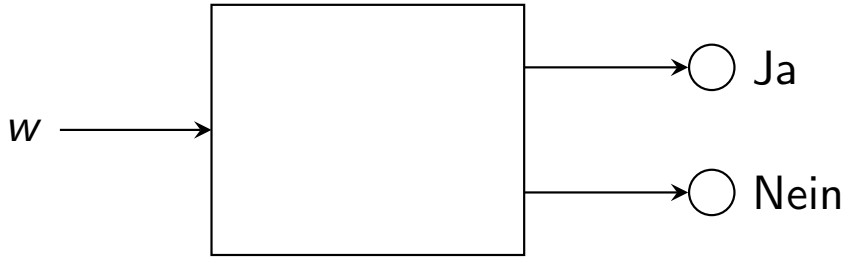
Definition (Entscheidbarkeit)

Eine Menge (Sprache) $A \subseteq \Sigma^*$ heisst entscheidbar, falls die charakteristische Funktion von A, nämlich $\chi_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$, berechenbar ist.

Hierbei ist für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\chi_A(w) := \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ 0 & \text{falls } w \notin A \end{cases}$$

Anschaulich:



Entscheidbarkeit

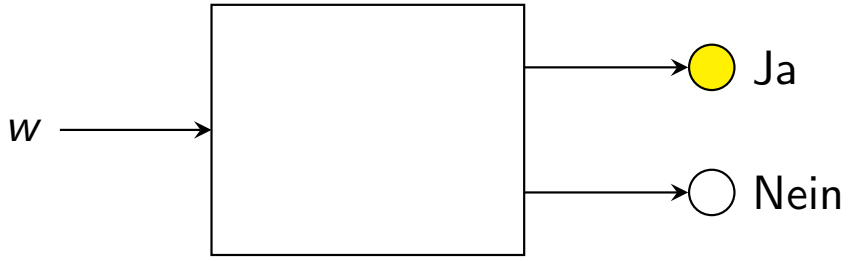
Definition (Entscheidbarkeit)

Eine Menge (Sprache) $A \subseteq \Sigma^*$ heisst entscheidbar, falls die charakteristische Funktion von A, nämlich $\chi_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$, berechenbar ist.

Hierbei ist für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\chi_A(w) := \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ 0 & \text{falls } w \notin A \end{cases}$$

Anschaulich:



Entscheidbarkeit

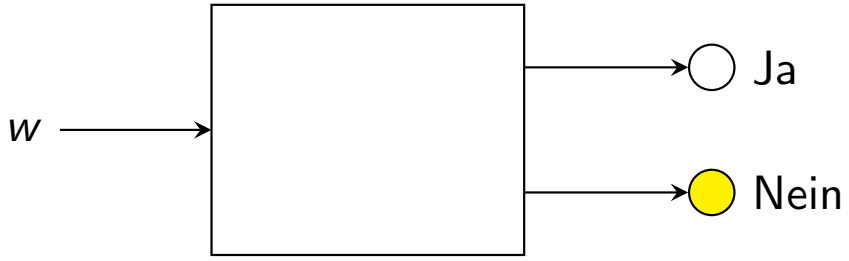
Definition (Entscheidbarkeit)

Eine Menge (Sprache) $A \subseteq \Sigma^*$ heisst entscheidbar, falls die charakteristische Funktion von A, nämlich $\chi_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$, berechenbar ist.

Hierbei ist für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\chi_A(w) := \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ 0 & \text{falls } w \notin A \end{cases}$$

Anschaulich:



Semi-Entscheidbarkeit

Definition (Semi-Entscheidbarkeit)

Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ heisst semi-entscheidbar, falls die „halbe“ charakteristische Funktion von A, nämlich $\chi'_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ berechenbar ist.

Hierbei ist für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\chi'_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ \textit{undefiniert} & \text{falls } w \notin A \end{cases}$$

Semi-Entscheidbarkeit

Definition (Semi-Entscheidbarkeit)

Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ heisst semi-entscheidbar,
falls die „halbe“ charakteristische Funktion von A,
nämlich $\chi'_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ berechenbar ist.

Hierbei ist für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\chi'_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ \textit{undefiniert} & \text{falls } w \notin A \end{cases}$$

Ist das nicht praktisch dasselbe wie Entscheidbarkeit?

Semi-Entscheidbarkeit

Definition (Semi-Entscheidbarkeit)

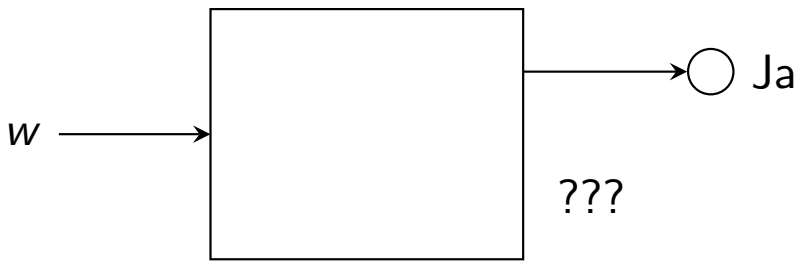
Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ heisst semi-entscheidbar,
falls die „halbe“ charakteristische Funktion von A,
nämlich $\chi'_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ berechenbar ist.

Hierbei ist für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\chi'_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ \textit{undefiniert} & \text{falls } w \notin A \end{cases}$$

Ist das nicht praktisch dasselbe wie Entscheidbarkeit? Nein!

Anschaulich:



Semi-Entscheidbarkeit

Definition (Semi-Entscheidbarkeit)

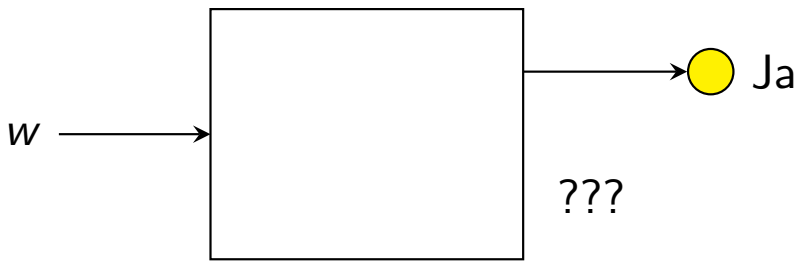
Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ heisst semi-entscheidbar,
falls die „halbe“ charakteristische Funktion von A,
nämlich $\chi'_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ berechenbar ist.

Hierbei ist für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\chi'_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ \textit{undefiniert} & \text{falls } w \notin A \end{cases}$$

Ist das nicht praktisch dasselbe wie Entscheidbarkeit? Nein!

Anschaulich:



Semi-Entscheidbarkeit

Definition (Semi-Entscheidbarkeit)

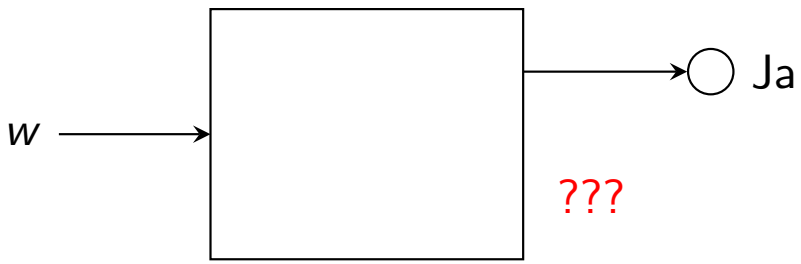
Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ heisst semi-entscheidbar,
falls die „halbe“ charakteristische Funktion von A,
nämlich $\chi'_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ berechenbar ist.

Hierbei ist für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\chi'_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in A \\ \textit{undefiniert} & \text{falls } w \notin A \end{cases}$$

Ist das nicht praktisch dasselbe wie Entscheidbarkeit? Nein!

Anschaulich:



Zusammenhang Entscheidbarkeit/Semi-Entscheidbarkeit

Satz (entscheidbar vs. semi-entscheidbar)

Eine Sprache A ist entscheidbar genau dann, wenn sowohl A als auch $\bar{A}$ semi-entscheidbar sind.

$\Rightarrow$: offensichtlich (Warum?)

$\Leftarrow$: Sei M_A ein Semi-Entscheidungsalgorithmus für A, $M_{\bar{A}}$ ein Semi-Entscheidungsverfahren für $\bar{A}$. Folgender Algorithmus ist dann Entscheidungsverfahren für A, d.h. berechnet χ_A:

```
INPUT (x):
FOR s := 1, 2, 3, ... DO
    IF M_A stoppt in s Schritten THEN OUTPUT(1)
    IF M_Ā stoppt in s Schritten THEN OUTPUT(0)
DONE
```

Rekursive Aufzählbarkeit: Definition

Definition (rekursive Aufzählbarkeit)

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heisst rekursiv aufzählbar,
falls $A = \emptyset$ oder falls es eine totale und berechenbare Funktion
$f : \mathbb{N}_0 \to \Sigma^*$ gibt, so dass

$$A = \{f(0), f(1), f(2) \dots\}.$$

Sprechweise: f zählt A (rekursiv) auf.

f muss nicht injektiv sein!

$\rightsquigarrow$ nicht verwechseln mit abzählbar!

Rekursive Aufzählbarkeit: Beispiele (1)

- $f(x) = \mathtt{a}^x$
- $f(x) = \begin{cases} \texttt{Hund} & \text{falls } x \bmod 3 = 0 \\ \texttt{Katze} & \text{falls } x \bmod 3 = 1 \\ \texttt{Superpapagei} & \text{falls } x \bmod 3 = 2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{falls } 2^x - 1 \text{ Primzahl} \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$

Rekursive Aufzählbarkeit: Beispiele (1)

- $f(x) = \mathtt{a}^x$
- $f(x) = \begin{cases} \texttt{Hund} & \text{falls } x \bmod 3 = 0 \\ \texttt{Katze} & \text{falls } x \bmod 3 = 1 \\ \texttt{Superpapagei} & \text{falls } x \bmod 3 = 2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{falls } 2^x - 1 \text{ Primzahl} \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$

Rekursive Aufzählbarkeit: Beispiele (1)

- $f(x) = \mathtt{a}^x$ zählt $\{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{aa}, \dots\}$ auf.
- $$f(x) = \begin{cases} \texttt{Hund} & \text{falls } x \bmod 3 = 0 \\ \texttt{Katze} & \text{falls } x \bmod 3 = 1 \\ \texttt{Superpapagei} & \text{falls } x \bmod 3 = 2 \end{cases}$$
- $$f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{falls } 2^x - 1 \text{ Primzahl} \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekursive Aufzählbarkeit: Beispiele (1)

- $f(x) = \mathsf{a}^x$ zählt $\{\varepsilon, \mathsf{a}, \mathsf{aa}, \dots\}$ auf.
- $f(x) = \begin{cases} \texttt{Hund} & \text{falls } x \bmod 3 = 0 \\ \texttt{Katze} & \text{falls } x \bmod 3 = 1 \\ \texttt{Superpapagei} & \text{falls } x \bmod 3 = 2 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{falls } 2^x - 1 \text{ Primzahl} \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$

Rekursive Aufzählbarkeit: Beispiele (1)

- $f(x) = \mathsf{a}^x$ zählt $\{\varepsilon, \mathsf{a}, \mathsf{aa}, \dots\}$ auf.
- $f(x) = \begin{cases} \texttt{Hund} & \text{falls } x \bmod 3 = 0 \\ \texttt{Katze} & \text{falls } x \bmod 3 = 1 \\ \texttt{Superpapagei} & \text{falls } x \bmod 3 = 2 \end{cases}$

  zählt $\{\texttt{Hund}, \texttt{Katze}, \texttt{Superpapagei}\}$ auf.
- $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{falls } 2^x - 1 \text{ Primzahl} \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$

Rekursive Aufzählbarkeit: Beispiele (1)

- $f(x) = \mathtt{a}^x$ zählt $\{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{aa}, \dots\}$ auf.
- $f(x) = \begin{cases} \texttt{Hund} & \text{falls } x \bmod 3 = 0 \\ \texttt{Katze} & \text{falls } x \bmod 3 = 1 \\ \texttt{Superpapagei} & \text{falls } x \bmod 3 = 2 \end{cases}$
  zählt $\{\texttt{Hund}, \texttt{Katze}, \texttt{Superpapagei}\}$ auf.
- $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{falls } 2^x - 1 \text{ Primzahl} \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$

Rekursive Aufzählbarkeit: Beispiele (1)

- $f(x) = \mathtt{a}^x$ zählt $\{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{aa}, \dots\}$ auf.
- $f(x) = \begin{cases} \texttt{Hund} & \text{falls } x \bmod 3 = 0 \\ \texttt{Katze} & \text{falls } x \bmod 3 = 1 \\ \texttt{Superpapagei} & \text{falls } x \bmod 3 = 2 \end{cases}$

  zählt $\{\texttt{Hund}, \texttt{Katze}, \texttt{Superpapagei}\}$ auf.
- $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{falls } 2^x - 1 \text{ Primzahl} \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$

  zählt Mersenne-Primzahlen auf.

Rekursive Aufzählbarkeit: Beispiele (2)

Für jedes Alphabet Σ ist Σ^* durch eine Funktion $f_{\Sigma^*} : \mathbb{N}_0 \to \Sigma^*$ rekursiv aufzählbar. (Wie?)

Rekursive Aufzählbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit (1)

Satz (rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar)

Eine Sprache A ist rekursiv aufzählbar genau dann, wenn A semi-entscheidbar ist.

Spezialfall $A = \emptyset$ ist kein Problem. Sei daher $A \neq \emptyset$ eine Sprache über dem Alphabet Σ.

Rekursive Aufzählbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit (1)

Satz (rekursiv aufzählbar = semi-entscheidbar)

Eine Sprache A ist rekursiv aufzählbar genau dann, wenn A semi-entscheidbar ist.

Spezialfall $A = \emptyset$ ist kein Problem. Sei daher $A \neq \emptyset$ eine Sprache über dem Alphabet Σ.

$\Rightarrow$:
Angenommen A ist rekursiv aufzählbar mittels Funktion f.
Dann ist dies ein Semi-Entscheidungsverfahren für A:

```
INPUT (x):
FOR n := 0, 1, 2, 3, ... DO
    IF f(n) = x THEN OUTPUT(1)
DONE
```

Rekursive Aufzählbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit (2)

$\Leftarrow$: Erinnerung: Wir kennen Abbildung von $\mathbb{N}_0^2$ auf $\mathbb{N}_0$ als
$n = encode(x, y)$ mit Umkehrfunktionen
$x = decode_1(n)$ und $y = decode_2(n)$.

Rekursive Aufzählbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit (2)

$\Leftarrow$: Erinnerung: Wir kennen Abbildung von $\mathbb{N}_0^2$ auf $\mathbb{N}_0$ als $n = encode(x, y)$ mit Umkehrfunktionen $x = decode_1(n)$ und $y = decode_2(n)$.

Sei A semi-entscheidbar mittels Algorithmus M.
Sei a ein festes Element aus A. Definiere:

$$f(n) := \begin{cases} x & \text{falls } n \text{ Kodierung eines Paares } (x, y) \text{ ist und} \\ & M \text{ angesetzt auf } f_{\Sigma^*}(x) \text{ stoppt in } y \text{ Schritten} \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekursive Aufzählbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit (2)

$\Leftarrow$: Erinnerung: Wir kennen Abbildung von $\mathbb{N}_0^2$ auf $\mathbb{N}_0$ als
$n = encode(x, y)$ mit Umkehrfunktionen
$x = decode_1(n)$ und $y = decode_2(n)$.

Sei A semi-entscheidbar mittels Algorithmus M.
Sei a ein festes Element aus A. Definiere:

$$f(n) := \begin{cases} x & \text{falls } n \text{ Kodierung eines Paares } (x, y) \text{ ist und} \\ & M \text{ angesetzt auf } f_{\Sigma^*}(x) \text{ stoppt in } y \text{ Schritten} \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

f ist total und berechenbar und hat als Wertebereich A.
Also zählt f die Sprache A rekursiv auf.

Berechnungs- und Entscheidungsmodelle

Zusammen mit den Ergebnissen aus Kapitel 13–15 folgt, dass folgende Aussagen über Sprache A alle äquivalent sind:

1. A ist rekursiv aufzählbar.
2. A ist semi-entscheidbar.
3. A ist vom Typ 0.
4. $A = \mathcal{L}(M)$ für eine Turingmaschine M.
5. χ'_A ist (Turing-, WHILE-, GOTO-) berechenbar. (*)
6. χ'_A ist μ-rekursiv. (*)
7. A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion.
8. A ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion.

(*): WHILE-/GOTO-Berechenbarkeit und μ-Rekursion erfordern Kodierung des Eingabeworts als Zahl.

Spezielles Halteproblem

Probleme

Begriff: Entscheidungsproblem = Problem = Sprache

(Teilmenge von Σ^* für endliches Alphabet Σ.)

Unentscheidbare Probleme

- Wir kennen jetzt viele Charakterisierungen von Semi-Entscheidbarkeit und Entscheidbarkeit.
- Was noch fehlt, ist ein konkretes Beispiel für ein unentscheidbares (= nicht entscheidbares) Problem.
- Gibt es unentscheidbare Probleme überhaupt?

Unentscheidbare Probleme

- Wir kennen jetzt viele Charakterisierungen von Semi-Entscheidbarkeit und Entscheidbarkeit.
- Was noch fehlt, ist ein konkretes Beispiel für ein unentscheidbares (= nicht entscheidbares) Problem.
- Gibt es unentscheidbare Probleme überhaupt?
- Ja! Zählargument: es gibt (für festes Σ) so viele Entscheidungsverfahren (z.B.: Turingmaschinen) wie Zahlen in $\mathbb{N}_0$, aber so viele Sprachen wie Zahlen in $\mathbb{R}$.

  Da $\mathbb{R}$ mächtiger („grösser“) ist als $\mathbb{N}_0$, muss es daher Sprachen ohne Entscheidungsverfahren geben.

Unentscheidbare Probleme

- Wir kennen jetzt viele Charakterisierungen von Semi-Entscheidbarkeit und Entscheidbarkeit.
- Was noch fehlt, ist ein konkretes Beispiel für ein unentscheidbares (= nicht entscheidbares) Problem.
- Gibt es unentscheidbare Probleme überhaupt?
- Ja! Zählargument: es gibt (für festes Σ) so viele Entscheidungsverfahren (z.B.: Turingmaschinen) wie Zahlen in $\mathbb{N}_0$, aber so viele Sprachen wie Zahlen in $\mathbb{R}$.

  Da $\mathbb{R}$ mächtiger („grösser“) ist als $\mathbb{N}_0$, muss es daher Sprachen ohne Entscheidungsverfahren geben.
- Dieses Argument liefert uns aber kein konkretes unentscheidbares Problem. $\rightsquigarrow$ Ziel dieses Abschnitts

Turingmaschinen als Eingaben

- Das erste unentscheidbare Problem, das wir kennenlernen werden, verwendet Turingmaschinen als Eingabe.

  $\rightsquigarrow$ „Programme, die Programme als Eingabe haben“: vgl. Compiler, Interpreter, virtuelle Maschinen, etc.
- Wir müssen uns also zunächst Gedanken darüber machen, wie wir beliebige Turingmaschinen als Wörter über einem festen Alphabet kodieren können.
- Wir verwenden das binäre Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.
- Als Zwischenschritt kodieren wir zunächst über dem Alphabet $\Sigma' = \{0, 1, \#\}$.

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (1)

Schritt 1: Kodierung einer Turingmaschine als Wort über $\{0, 1, \#\}$

Erinnerung: Turingmaschine $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$

Idee:

- Zustände in Z und Symbole in Γ nummerieren und als Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ betrachten
- Anfangszustand erhält immer Nummer 0
- Eingabealphabet Σ soll immer $\{0, 1\}$ sein
- Blank-Zeichen wird immer mit 2 nummeriert

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (1)

Schritt 1: Kodierung einer Turingmaschine als Wort über $\{0, 1, \#\}$

Erinnerung: Turingmaschine $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle$

Idee:

- Zustände in Z und Symbole in Γ nummerieren und als Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ betrachten
- Anfangszustand erhält immer Nummer 0
- Eingabealphabet Σ soll immer $\{0, 1\}$ sein
- Blank-Zeichen wird immer mit 2 nummeriert

Dann reicht es aus, nur δ explizit zu kodieren:

- Z: alle in der Kodierung von δ erwähnten Zustände
- E: alle Zustände, die nicht links in einer δ-Regel auftauchen
- $\Gamma = \{0, 1, \square, a_3, a_4, \ldots, a_k\}$, wobei k die grösste Symbolnummer ist, die in den δ-Regeln erwähnt wird

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (2)

Kodierung der Regeln:

- Sei $\delta(z_i, a_j) = \langle z_{i'}, a_{j'}, y \rangle$ eine Regel in δ,
  wobei die Indizes i, i', j, j' der Nummerierung
  der Zustände/Symbole entsprechen und $y \in \{\mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{N}\}$.
- Kodiere diese Regel als
  $w_{i,j,i',j',y} = \#\#bin(i)\#bin(j)\#bin(i')\#bin(j')\#bin(m)$, wobei
  $$m = \begin{cases} 0 & \text{falls } y = L \\ 1 & \text{falls } y = R \\ 2 & \text{falls } y = N \end{cases}$$
- Für jede Regel in δ erhalten wir ein solches Wort.
- Alle diese Wörter hintereinander (in beliebiger Reihenfolge)
  kodieren die Turingmaschine.

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (3)

Schritt 2: Transformation in Wort über $\{0, 1\}$ mit Abbildung

$$0 \mapsto 00$$

$$1 \mapsto 01$$

$$\# \mapsto 11$$

Turingmaschine kann aus ihrer Kodierung rekonstruiert werden.
Wie?

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (4)

Beispiel (Schritt 1)

$\delta(z_2, a_3) = (z_0, a_2, N)$ wird zu ##10#11#0#10#10

$\delta(z_1, a_1) = (z_3, a_0, L)$ wird zu ##1#1#11#0#0

Beispiel (Schritt 2)

##10#11#0#10#10##1#1#11#0#0

1111010011010111001101001101001111011101110101110011100

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (4)

Beispiel (Schritt 1)

$\delta(z_2, a_3) = (z_0, a_2, N)$ wird zu ##10#11#0#10#10

$\delta(z_1, a_1) = (z_3, a_0, L)$ wird zu ##1#1#11#0#0

Beispiel (Schritt 2)

##10#11#0#10#10##1#1#11#0#0

1111010011010111001101001101001111011101110101110011100

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (4)

Beispiel (Schritt 1)

$\delta(z_2, a_3) = (z_0, a_2, N)$ wird zu ##10#11#0#10#10

$\delta(z_1, a_1) = (z_3, a_0, L)$ wird zu ##1#1#11#0#0

Beispiel (Schritt 2)

##10#11#0#10#10##1#1#11#0#0

1111010011010111001101001101001111011101110101110011100

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (4)

Beispiel (Schritt 1)

$\delta(z_2, a_3) = (z_0, a_2, N)$ wird zu ##10#11#0#10#10

$\delta(z_1, a_1) = (z_3, a_0, L)$ wird zu ##1#1#11#0#0

Beispiel (Schritt 2)

##10#11#0#10#10##1#1#11#0#0

1111010011010111001101001101001111011101110101110011100

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (4)

Beispiel (Schritt 1)

$\delta(z_2, a_3) = (z_0, a_2, N)$ wird zu ##10#11#0#10#10

$\delta(z_1, a_1) = (z_3, a_0, L)$ wird zu ##1#1#11#0#0

Beispiel (Schritt 2)

##10#11#0#10#10##1#1#11#0#0

1111010011010111001101001101001111011101110101110011100

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (4)

Beispiel (Schritt 1)

$\delta(z_2, a_3) = (z_0, a_2, N)$ wird zu ##10#11#0#10#10

$\delta(z_1, a_1) = (z_3, a_0, L)$ wird zu ##1#1#11#0#0

Beispiel (Schritt 2)

##10#11#0#10#10##1#1#11#0#0

1111010011010111001101001101001111011101110101110011100

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (4)

Beispiel (Schritt 1)

$\delta(z_2, a_3) = (z_0, a_2, N)$ wird zu ##10#11#0#10#10

$\delta(z_1, a_1) = (z_3, a_0, L)$ wird zu ##1#1#11#0#0

Beispiel (Schritt 2)

##10#11#0#10#10##1#1#11#0#0

1111010011010111001101001101001111011101110101110011100

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (4)

Beispiel (Schritt 1)

$\delta(z_2, a_3) = (z_0, a_2, N)$ wird zu ##10#11#0#10#10

$\delta(z_1, a_1) = (z_3, a_0, L)$ wird zu ##1#1#11#0#0

Beispiel (Schritt 2)

##10#11#0#10#10##1#1#11#0#0

11110100110101110011010011010011111011101110101110011100

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (4)

Beispiel (Schritt 1)

$\delta(z_2, a_3) = (z_0, a_2, N)$ wird zu ##10#11#0#10#10

$\delta(z_1, a_1) = (z_3, a_0, L)$ wird zu ##1#1#11#0#0

Beispiel (Schritt 2)

##10#11#0#10#10##1#1#11#0#0

1111010011010111001101001101001111011101110101110011100

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (4)

Beispiel (Schritt 1)

$\delta(z_2, a_3) = (z_0, a_2, N)$ wird zu ##10#11#0#10#10

$\delta(z_1, a_1) = (z_3, a_0, L)$ wird zu ##1#1#11#0#0

Beispiel (Schritt 2)

##10#11#0#10#10##1#1#11#0#0

1111010011010111001101001101001111011101110101110011100

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (4)

Beispiel (Schritt 1)

$\delta(z_2, a_3) = (z_0, a_2, N)$ wird zu ##10#11#0#10#10

$\delta(z_1, a_1) = (z_3, a_0, L)$ wird zu ##1#1#11#0#0

Beispiel (Schritt 2)

##10#11#0#10#10##1#1#11#0#0

1111010011010111001101001101001111011101110101110011100

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (4)

Beispiel (Schritt 1)

$\delta(z_2, a_3) = (z_0, a_2, N)$ wird zu ##10#11#0#10#10

$\delta(z_1, a_1) = (z_3, a_0, L)$ wird zu ##1#1#11#0#0

Beispiel (Schritt 2)

##10#11#0#10#10##1#1#11#0#0

1111010011010111001101001101001111011101110101110011100

Kodierung einer Turingmaschine als Wort (4)

Beispiel (Schritt 1)

$\delta(z_2, a_3) = (z_0, a_2, N)$ wird zu ##10#11#0#10#10

$\delta(z_1, a_1) = (z_3, a_0, L)$ wird zu ##1#1#11#0#0

Beispiel (Schritt 2)

##10#11#0#10#10##1#1#11#0#0

1111010011010111001101001101001111011101110101110011 00

Anmerkung: Wir können das Kodierungswort auch (eindeutig; warum?) als Zahl auffassen, die diese TM nummeriert.

Dies ist nicht für das Halteproblem wichtig, aber in anderen Kontexten, wo wir mit Zahlen statt Wörtern operieren.

Turingmaschine eines Wortes

Ziel: Funktion, die ein beliebiges Wort in $\{0,1\}^*$ auf eine Turingmaschine abbildet.

Problem: Nicht jedes Wort in $\{0,1\}^*$ ist Kodierung einer Turingmaschine.

Lösung: Sei $\widehat{M}$ eine beliebige, feste Turingmaschine (zum Beispiel eine TM, die immer sofort hält). Dann:

Definition (Turingmaschine eines Wortes)

Für $w \in \{0,1\}^*$ ist

$$M_w = \begin{cases} M & \text{falls } w \text{ Codewort von } M \text{ ist} \\ \widehat{M} & \text{sonst} \end{cases}$$

Spezielles Halteproblem

Unsere Vorarbeiten sind nun fertig und wir können definieren:

Definition (spezielles Halteproblem)

Das spezielle Halteproblem oder Selbstanwendbarkeitsproblem ist die Sprache

$$K = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}.$$

$\rightsquigarrow$ w spielt Doppelrolle zur Kodierung der Turingmaschine und als Eingabe für die kodierte Turingmaschine

Semi-Entscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Satz (Semi-Entscheidbarkeit des speziellen Halteproblems)

Das spezielle Halteproblem ist semi-entscheidbar.

Beweis.

Wir konstruieren einen „Interpreter“ für DTMs,
der die Kodierung einer DTM als Eingabe w erhält
und deren Berechnung auf Eingabe w dann simuliert.

Wenn die simulierte DTM anhält, gibt der Interpreter
das Ergebnis 1 zurück. Dieser Interpreter berechnet χ'_K,
ist also ein Semi-Entscheidungsverfahren für K. □

Anmerkung: TMs, die beliebige TMs simulieren können,
heissen universelle Turingmaschinen.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems (1)

Satz (Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems)

Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems (1)

Satz (Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems)

Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Beweis.

Widerspruchsbeweis: wir nehmen an, das spezielle Halteproblem K wäre entscheidbar und leiten einen Widerspruch her.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems (1)

Satz (Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems)

Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Beweis.

Widerspruchsbeweis: wir nehmen an, das spezielle Halteproblem K wäre entscheidbar und leiten einen Widerspruch her.

Sei K also entscheidbar. Dann ist χ_K berechenbar (Warum?).

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems (1)

Satz (Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems)

Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Beweis.

Widerspruchsbeweis: wir nehmen an, das spezielle Halteproblem K wäre entscheidbar und leiten einen Widerspruch her.

Sei K also entscheidbar. Dann ist χ_K berechenbar (Warum?).

Sei M eine Turingmaschine, die χ_K berechnet, also für gegebenes Wort w auf das Band 0 oder 1 schreibt (je nach dem, ob $w \in K$) und dann hält. ...

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems (2)

Beweis (Fortsetzung).

Konstruiere neue Maschine M' wie folgt:

1. Führe M auf der Eingabe w aus.
2. Wenn 0 auf dem Band steht: halte an.
3. Ansonsten: Endlosschleife.

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems (2)

Beweis (Fortsetzung).

Konstruiere neue Maschine M' wie folgt:

1. Führe M auf der Eingabe w aus.
2. Wenn 0 auf dem Band steht: halte an.
3. Ansonsten: Endlosschleife.

Sei w' Codewort für M'. Wie verhält sich M' bei Eingabe w'?

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems (2)

Beweis (Fortsetzung).

Konstruiere neue Maschine M' wie folgt:

1. Führe M auf der Eingabe w aus.
2. Wenn 0 auf dem Band steht: halte an.
3. Ansonsten: Endlosschleife.

Sei w' Codewort für M'. Wie verhält sich M' bei Eingabe w'?

M' angesetzt auf w' hält
gdw. M angesetzt auf w' gibt 0 aus

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems (2)

Beweis (Fortsetzung).

Konstruiere neue Maschine M' wie folgt:

1. Führe M auf der Eingabe w aus.
2. Wenn 0 auf dem Band steht: halte an.
3. Ansonsten: Endlosschleife.

Sei w' Codewort für M'. Wie verhält sich M' bei Eingabe w'?

M' angesetzt auf w' hält
gdw. M angesetzt auf w' gibt 0 aus
gdw. $\chi_K(w') = 0$

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems (2)

Beweis (Fortsetzung).

Konstruiere neue Maschine M' wie folgt:

1. Führe M auf der Eingabe w aus.
2. Wenn 0 auf dem Band steht: halte an.
3. Ansonsten: Endlosschleife.

Sei w' Codewort für M'. Wie verhält sich M' bei Eingabe w'?

M' angesetzt auf w' hält
gdw. M angesetzt auf w' gibt 0 aus
gdw. $\chi_K(w') = 0$
gdw. $w' \notin K$

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems (2)

Beweis (Fortsetzung).

Konstruiere neue Maschine M' wie folgt:

1. Führe M auf der Eingabe w aus.
2. Wenn 0 auf dem Band steht: halte an.
3. Ansonsten: Endlosschleife.

Sei w' Codewort für M'. Wie verhält sich M' bei Eingabe w'?

M' angesetzt auf w' hält
gdw. M angesetzt auf w' gibt 0 aus
gdw. $\chi_K(w') = 0$
gdw. $w' \notin K$
gdw. $M_{w'}$ angesetzt auf w' hält nicht

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems (2)

Beweis (Fortsetzung).

Konstruiere neue Maschine M' wie folgt:

1. Führe M auf der Eingabe w aus.
2. Wenn 0 auf dem Band steht: halte an.
3. Ansonsten: Endlosschleife.

Sei w' Codewort für M'. Wie verhält sich M' bei Eingabe w'?

M' angesetzt auf w' hält
gdw. M angesetzt auf w' gibt 0 aus
gdw. $\chi_K(w') = 0$
gdw. $w' \notin K$
gdw. $M_{w'}$ angesetzt auf w' hält nicht
gdw. M' angesetzt auf w' hält nicht

Widerspruch! Damit ist der Beweis erbracht. □

Zurück zu Kapitel 12: Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Typ 3	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja
Typ 2	Nein	Ja	Nein	Ja	Ja
Typ 1	Ja$^{(1)}$	Ja$^{(3)}$	Ja$^{(1)}$	Ja$^{(3)}$	Ja$^{(3)}$
Typ 0	Ja$^{(3)}$	Ja$^{(3)}$	Nein$^{(2)}$	Ja$^{(3)}$	Ja$^{(3)}$

Beweise?

(1) ohne Beweis

(2) Beweis in späteren Vorlesungskapiteln

(3) Beweis in den Übungen

zurück zu Kapitel 12: Entscheidbarkeit

	Wort-problem	Leerheits-problem	Äquivalenz-problem	Schnitt-problem
Typ 3	Ja	Ja	Ja	Ja
Typ 2	Ja	Ja	Nein	Nein
Typ 1	Ja	Nein$^{(1)}$	Nein$^{(1)}$	Nein$^{(1)}$
Typ 0	Nein$^{(2)}$	Nein$^{(2)}$	Nein$^{(2)}$	Nein$^{(2)}$

(1) ohne Beweise

(2) Beweis in Vorlesungsabschnitt 3

Antworten auf alte Fragen

Abschlusseigenschaften:

- K ist semi-entscheidbar (also Typ 0), aber nicht entscheidbar
- $\leadsto$ $\bar{K}$ ist nicht semi-entscheidbar, also nicht Typ 0.

$\leadsto$ Typ-0-Sprachen sind nicht unter Komplement abgeschlossen

Entscheidbarkeit:

- K ist Typ 0, aber nicht entscheidbar.

$\leadsto$ Wortproblem für Typ-0-Sprachen nicht entscheidbar

$\leadsto$ Leerheits-, Äquivalenz-, Schnittproblem: Übungen
(Hierfür fehlen uns noch einige wichtige Resultate.)

Spezielles Halteproblem: Diskussion

- Wir kennen nun ein konkretes unentscheidbares Problem.
- Das Problem ist allerdings recht künstlich:
  wie oft möchte man ein Programm auf sich selbst anwenden?
- Wir werden sehen, dass man aus der Unentscheidbarkeit
  des speziellen Halteproblems leicht weitere (praktischere)
  Unentscheidbarkeitsergebnisse folgern kann.
- Zentraler Begriff dabei ist die Reduktion:
  Zurückführen eines neuen Problems auf ein bereits bekanntes.

Reduzierbarkeit

Reduzierbarkeit: Definition

Definition (reduzierbar, Reduktion)

Seien $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$ Sprachen,
und sei $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ eine totale und berechenbare Funktion,
so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in A \quad \text{genau dann, wenn} \quad f(x) \in B.$$

Dann heisst A auf B reduzierbar (in Symbolen: $A \leq B$)
und f heisst Reduktion von A auf B.

Reduzierbarkeit: Eigenschaften (1)

Satz (Ordnungseigenschaften von Reduktionen)

Die Relation „$\leq$“ ist eine schwache Halbordnung:

1. *Für alle Sprachen A gilt:*
   $A \leq A$ *(Reflexivität)*
2. *Für alle Sprachen A, B, C gilt:*
   Wenn $A \leq B$ und $B \leq C$, dann $A \leq C$ (Transitivität)

Reduzierbarkeit: Eigenschaften (1)

Satz (Ordnungseigenschaften von Reduktionen)

Die Relation „$\leq$“ ist eine schwache Halbordnung:

1. *Für alle Sprachen A gilt:*
   $A \leq A$ *(Reflexivität)*
2. *Für alle Sprachen A, B, C gilt:*
   Wenn $A \leq B$ und $B \leq C$, dann $A \leq C$ (Transitivität)

Beweis.

zu 1.: $f(x) = x$ ist eine Reduktion von A auf A,
da total und berechenbar und $x \in A$ gdw. $f(x) \in A$

zu 2.: $\rightsquigarrow$ Übungen $\square$

Reduzierbarkeit: Eigenschaften (2)

Satz (Reduzierbarkeit vs. (Semi-) Entscheidbarkeit)

Seien A und B Sprachen mit $A \leq B$. Dann gilt:

1. *Wenn B entscheidbar ist, ist auch A entscheidbar.*
2. *Wenn B semi-entscheidbar ist, ist auch A semi-entscheidbar.*
3. *Wenn A nicht entscheidbar ist,*
   dann ist auch B nicht entscheidbar.
4. *Wenn A nicht semi-entscheidbar ist,*
   dann ist auch B nicht semi-entscheidbar.

$\rightsquigarrow$ Wir verwenden im folgenden 3., um für weitere Probleme die Unentscheidbarkeit zu zeigen.

Reduzierbarkeit: Eigenschaften (3)

Beweis.

zu 1.:

- B entscheidbar $\rightsquigarrow$ χ_B berechenbar

Reduzierbarkeit: Eigenschaften (3)

Beweis.

zu 1.:

- B entscheidbar $\rightsquigarrow$ χ_B berechenbar
- $A \leq B \rightsquigarrow$ es gibt Reduktion f von A auf B;
  f total und berechenbar

Reduzierbarkeit: Eigenschaften (3)

Beweis.

zu 1.:

- B entscheidbar $\rightsquigarrow$ χ_B berechenbar
- $A \leq B \rightsquigarrow$ es gibt Reduktion f von A auf B; f total und berechenbar
- Es gilt für alle $x \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } f(x) \in B \\ 0 & \text{falls } f(x) \notin B \end{cases} \\ &= \chi_B(f(x)) = (\chi_B \circ f)(x).\end{aligned}$$

Reduzierbarkeit: Eigenschaften (3)

Beweis.

zu 1.:

- B entscheidbar $\rightsquigarrow$ χ_B berechenbar
- $A \leq B \rightsquigarrow$ es gibt Reduktion f von A auf B; f total und berechenbar
- Es gilt für alle $x \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } f(x) \in B \\ 0 & \text{falls } f(x) \notin B \end{cases} \\ &= \chi_B(f(x)) = (\chi_B \circ f)(x).\end{aligned}$$

- Komposition $\chi_B \circ f$ ist berechenbar

Reduzierbarkeit: Eigenschaften (3)

Beweis.

zu 1.:

- B entscheidbar $\rightsquigarrow$ χ_B berechenbar
- $A \leq B \rightsquigarrow$ es gibt Reduktion f von A auf B; f total und berechenbar
- Es gilt für alle $x \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } f(x) \in B \\ 0 & \text{falls } f(x) \notin B \end{cases} \\ &= \chi_B(f(x)) = (\chi_B \circ f)(x).\end{aligned}$$

- Komposition $\chi_B \circ f$ ist berechenbar

$\rightsquigarrow$ χ_A berechenbar $\rightsquigarrow$ A entscheidbar ...

Reduzierbarkeit: Eigenschaften (4)

Beweis (Fortsetzung).

zu 1. (alternative Formulierung):

Der folgende Algorithmus berechnet $\chi_A(x)$ für Eingabe x:

y := $f(x)$
result := $\chi_B(y)$
OUTPUT(result)

Reduzierbarkeit: Eigenschaften (4)

Beweis (Fortsetzung).

zu 1. (alternative Formulierung):

Der folgende Algorithmus berechnet $\chi_A(x)$ für Eingabe x:

y := $f(x)$
result := $\chi_B(y)$
OUTPUT(result)

zu 2.: wie 1. mit χ' statt χ und mit *undefiniert* statt 0

Reduzierbarkeit: Eigenschaften (4)

Beweis (Fortsetzung).

zu 1. (alternative Formulierung):
Der folgende Algorithmus berechnet $\chi_A(x)$ für Eingabe x:

y := $f(x)$
`result` := $\chi_B(y)$
`OUTPUT(result)`

zu 2.: wie 1. mit χ' statt χ und mit *undefiniert* statt 0

zu 3.+4.: äquivalent zu 1.+2. (Kontraposition) □

Weitere unentscheidbare Probleme

Allgemeines Halteproblem (1)

Definition (allgemeines Halteproblem)

Das allgemeine Halteproblem oder Halteproblem ist die Sprache

$$H = \{w\#x \in \{0,1,\#\}^* \mid w, x \in \{0,1\}^*, M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ hält}\}$$

Allgemeines Halteproblem (1)

Definition (allgemeines Halteproblem)

Das allgemeine Halteproblem oder Halteproblem ist die Sprache

$$H = \{w\#x \in \{0,1,\#\}^* \mid w, x \in \{0,1\}^*, M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ hält}\}$$

Anmerkung: H ist semi-entscheidbar. (Warum?)

Allgemeines Halteproblem (1)

Definition (allgemeines Halteproblem)

Das allgemeine Halteproblem oder Halteproblem ist die Sprache

$$H = \{w\#x \in \{0,1,\#\}^* \mid w, x \in \{0,1\}^*, M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ hält}\}$$

Anmerkung: H ist semi-entscheidbar. (Warum?)

Satz (Unentscheidbarkeit des allgemeinen Halteproblems)

Das allgemeine Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Intuition: wenn der Spezialfall K nicht entscheidbar ist,
kann es das allgemeinere Problem H erst recht nicht sein.

Allgemeines Halteproblem (2)

Beweis.

Wir zeigen $K \leq H$ (Erinnerung: K ist das spezielle Halteproblem)

Wir definieren $f : \{0,1\}^* \to \{0,1,\#\}^*$ als $f(w) := w\#w$.

f ist offensichtlich total und berechenbar, und es gilt:

$$
\begin{aligned}
& w \in K \\
\text{gdw. } & M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält} \\
\text{gdw. } & w\#w \in H \\
\text{gdw. } & f(w) \in H
\end{aligned}
$$

Allgemeines Halteproblem (2)

Beweis.

Wir zeigen $K \leq H$ (Erinnerung: K ist das spezielle Halteproblem)

Wir definieren $f : \{0,1\}^* \to \{0,1,\#\}^*$ als $f(w) := w\#w$.

f ist offensichtlich total und berechenbar, und es gilt:

$$
\begin{aligned}
& w \in K \\
\text{gdw. } & M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält} \\
\text{gdw. } & w\#w \in H \\
\text{gdw. } & f(w) \in H
\end{aligned}
$$

Damit ist f eine Reduktion von K auf H, und wegen der Unentscheidbarkeit von K ist auch H unentscheidbar. □

Halteproblem auf leerem Band (1)

Definition (Halteproblem auf leerem Band)

Das Halteproblem auf leerem Band ist die Sprache

$$H_0 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ angesetzt auf } \varepsilon \text{ hält}\}.$$

Halteproblem auf leerem Band (1)

Definition (Halteproblem auf leerem Band)

Das Halteproblem auf leerem Band ist die Sprache

$$H_0 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ angesetzt auf } \varepsilon \text{ hält}\}.$$

Anmerkung: H_0 ist semi-entscheidbar. (Warum?)

Halteproblem auf leerem Band (1)

Definition (Halteproblem auf leerem Band)

Das Halteproblem auf leerem Band ist die Sprache

$$H_0 = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ angesetzt auf } \varepsilon \text{ hält}\}.$$

Anmerkung: H_0 ist semi-entscheidbar. (Warum?)

Satz (Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band)

Das Halteproblem auf leerem Band ist nicht entscheidbar.

Halteproblem auf leerem Band (2)

Beweis.

Wir zeigen $H \leq H_0$.

Halteproblem auf leerem Band (2)

Beweis.

Wir zeigen $H \leq H_0$.

Betrachte dazu die Funktion $f : \{0, 1, \#\}^* \to \{0, 1\}^*$,
die gegeben $z \in \{0, 1, \#\}^*$ das Wort $f(z)$ wie folgt berechnet:

Halteproblem auf leerem Band (2)

Beweis.

Wir zeigen $H \leq H_0$.

Betrachte dazu die Funktion $f : \{0, 1, \#\}^* \to \{0, 1\}^*$,
die gegeben $z \in \{0, 1, \#\}^*$ das Wort $f(z)$ wie folgt berechnet:

- Teste, ob z von der Form $w\#x$ mit $w, x \in \{0, 1\}^*$ ist.
- Falls nein, liefere irgendein Wort zurück, das nicht in H_0 liegt (z.B. Kodierung einer TM, die sofort in Endlosschleife geht).
- Falls ja, zerlege z in w und x.

...

Halteproblem auf leerem Band (2)

Beweis.

Wir zeigen $H \leq H_0$.

Betrachte dazu die Funktion $f : \{0, 1, \#\}^* \to \{0, 1\}^*$,
die gegeben $z \in \{0, 1, \#\}^*$ das Wort $f(z)$ wie folgt berechnet:

- Teste, ob z von der Form $w\#x$ mit $w, x \in \{0, 1\}^*$ ist.
- Falls nein, liefere irgendein Wort zurück, das nicht in H_0 liegt (z.B. Kodierung einer TM, die sofort in Endlosschleife geht).
- Falls ja, zerlege z in w und x.
- Dekodiere w zu einer TM M_2.

...

Halteproblem auf leerem Band (3)

Beweis (Fortsetzung).

- Konstruiere eine TM M_1, die sich wie folgt verhält:
  - falls Eingabe leer: schreibe x auf das Band und bewege Kopf auf erstes Zeichen von x (falls $x \neq \varepsilon$); dann halte
  - ansonsten halte sofort

Halteproblem auf leerem Band (3)

Beweis (Fortsetzung).

- Konstruiere eine TM M_1, die sich wie folgt verhält:
  - falls Eingabe leer: schreibe x auf das Band und bewege Kopf auf erstes Zeichen von x (falls $x \neq \varepsilon$); dann halte
  - ansonsten halte sofort
- Konstruiere TM M, die erst M_1 und dann M_2 ausführt.

Halteproblem auf leerem Band (3)

Beweis (Fortsetzung).

- Konstruiere eine TM M_1, die sich wie folgt verhält:
  - falls Eingabe leer: schreibe x auf das Band und bewege Kopf auf erstes Zeichen von x (falls $x \neq \varepsilon$); dann halte
  - ansonsten halte sofort
- Konstruiere TM M, die erst M_1 und dann M_2 ausführt.
- Liefere Kodierung von M zurück.

Halteproblem auf leerem Band (3)

Beweis (Fortsetzung).

- Konstruiere eine TM M_1, die sich wie folgt verhält:
  - falls Eingabe leer: schreibe x auf das Band und bewege Kopf auf erstes Zeichen von x (falls $x \neq \varepsilon$); dann halte
  - ansonsten halte sofort
- Konstruiere TM M, die erst M_1 und dann M_2 ausführt.
- Liefere Kodierung von M zurück.

f ist total und (mit etwas Mühe) berechenbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} z \in H &\text{ gdw. } z = w\#x \text{ und } M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ hält} \\ &\text{gdw. } M_{f(z)} \text{ hält auf leerem Band} \\ &\text{gdw. } f(z) \in H_0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow H \leq H_0 \rightsquigarrow H_0$ unentscheidbar □

Satz von Rice (1)

- Wir haben für eine Reihe von (verwandten) Problemen gezeigt, dass sie unentscheidbar sind:
  - spezielles Halteproblem K
  - allgemeines Halteproblem H
  - Halteproblem auf leerem Band H_0
- Viele weitere Resultate dieser Art könnten bewiesen werden.
- Stattdessen beweisen wir ein sehr viel mächtigeres Ergebnis, den Satz von Rice, der zeigt, dass eine sehr grosse Klasse unterschiedlicher Probleme unentscheidbar sind.
- Der Satz von Rice lässt sich informell zusammenfassen als: jede Frage darüber, was eine gegebene Turingmaschine berechnet, ist unentscheidbar.

Satz von Rice (2)

Satz (Satz von Rice)

Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller Turing-berechenbaren Funktionen.
Sei $\mathcal{S}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{R}$ ausser $\mathcal{S} = \emptyset$ oder $\mathcal{S} = \mathcal{R}$.
Dann ist die Sprache

$$C(\mathcal{S}) = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

unentscheidbar.

Frage: warum die Forderung $\mathcal{S} \neq \emptyset$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$?

Erweiterung (ohne Beweis): in den meisten Fällen ist weder $C(\mathcal{S})$ noch $\overline{C(\mathcal{S})}$ semi-entscheidbar. (Es gibt aber Mengen $\mathcal{S}$, für die eine der beiden Sprachen semi-entscheidbar ist.)

Satz von Rice (3)

Beweis.

Sei Ω die überall undefinierte Funktion.

Satz von Rice (3)

Beweis.

Sei Ω die überall undefinierte Funktion.

Fallunterscheidung:

Fall 1: $\Omega \in \mathcal{S}$

Satz von Rice (3)

Beweis.

Sei Ω die überall undefinierte Funktion.

Fallunterscheidung:

Fall 1: $\Omega \in \mathcal{S}$

Sei $q \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$ eine beliebige Turing-berechenbare Funktion ausserhalb von $\mathcal{S}$ (existiert, da $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$).

Satz von Rice (3)

Beweis.

Sei Ω die überall undefinierte Funktion.

Fallunterscheidung:

Fall 1: $\Omega \in \mathcal{S}$

Sei $q \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$ eine beliebige Turing-berechenbare Funktion ausserhalb von $\mathcal{S}$ (existiert, da $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ und $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}$).

Sei Q eine Turingmaschine, die q berechnet. ...

Satz von Rice (4)

Beweis (Fortsetzung).

Betrachte Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$,
wobei $f(w)$ wie folgt definiert ist:

- Konstruiere TM M, die sich auf Eingabe y zunächst verhält wie M_w auf leerem Band (unabhängig von y).
- Anschliessend (falls diese Berechnung hält!)
  löscht M Bandinhalt, stellt Startkonfiguration von Q
  auf Eingabe y her und simuliert dann Q.
- $f(w)$ ist die Kodierung dieser TM M

Satz von Rice (4)

Beweis (Fortsetzung).

Betrachte Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$,
wobei $f(w)$ wie folgt definiert ist:

- Konstruiere TM M, die sich auf Eingabe y zunächst verhält wie M_w auf leerem Band (unabhängig von y).
- Anschliessend (falls diese Berechnung hält!) löscht M Bandinhalt, stellt Startkonfiguration von Q auf Eingabe y her und simuliert dann Q.
- $f(w)$ ist die Kodierung dieser TM M

f ist total und berechenbar. ...

Satz von Rice (5)

Beweis (Fortsetzung).

Welche Funktion berechnet die durch $f(w)$ kodierte TM?

Satz von Rice (5)

Beweis (Fortsetzung).

Welche Funktion berechnet die durch $f(w)$ kodierte TM?

$$M_{f(w)} \text{ berechnet } \begin{cases} \Omega & \text{falls } M_w \text{ auf leerem Band nicht hält} \\ q & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz von Rice (5)

Beweis (Fortsetzung).

Welche Funktion berechnet die durch $f(w)$ kodierte TM?

$$M_{f(w)} \text{ berechnet } \begin{cases} \Omega & \text{falls } M_w \text{ auf leerem Band nicht hält} \\ q & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt für alle Wörter $w \in \{0,1\}^*$:

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält auf leerem Band} \\ &\Longrightarrow M_{f(w)} \text{ berechnet die Funktion } q \\ &\Longrightarrow \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion liegt nicht in } \mathcal{S} \\ &\Longrightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

...

Satz von Rice (6)

Beweis (Fortsetzung).

Ferner gilt:

$$
\begin{aligned}
w \notin H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält nicht auf leerem Band} \\
&\Longrightarrow M_{f(w)} \text{ berechnet die Funktion } \Omega \\
&\Longrightarrow \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\
&\Longrightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})
\end{aligned}
$$

Satz von Rice (6)

Beweis (Fortsetzung).

Ferner gilt:

$$
\begin{aligned}
w \notin H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält nicht auf leerem Band} \\
&\Longrightarrow M_{f(w)} \text{ berechnet die Funktion } \Omega \\
&\Longrightarrow \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\
&\Longrightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})
\end{aligned}
$$

Zusammen folgt: $w \notin H_0$ gdw. $f(w) \in C(\mathcal{S})$,
also $w \in \bar{H}_0$ gdw. $f(w) \in C(\mathcal{S})$.

Satz von Rice (6)

Beweis (Fortsetzung).

Ferner gilt:

$$
\begin{aligned}
w \notin H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält nicht auf leerem Band} \\
&\Longrightarrow M_{f(w)} \text{ berechnet die Funktion } \Omega \\
&\Longrightarrow \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\
&\Longrightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})
\end{aligned}
$$

Zusammen folgt: $w \notin H_0$ gdw. $f(w) \in C(\mathcal{S})$,
also $w \in \bar{H}_0$ gdw. $f(w) \in C(\mathcal{S})$.

Somit ist f eine Reduktion von $\bar{H}_0$ nach $C(\mathcal{S})$.

Satz von Rice (6)

Beweis (Fortsetzung).

Ferner gilt:

$$
\begin{aligned}
w \notin H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält nicht auf leerem Band} \\
&\Longrightarrow M_{f(w)} \text{ berechnet die Funktion } \Omega \\
&\Longrightarrow \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\
&\Longrightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})
\end{aligned}
$$

Zusammen folgt: $w \notin H_0$ gdw. $f(w) \in C(\mathcal{S})$,
also $w \in \bar{H}_0$ gdw. $f(w) \in C(\mathcal{S})$.

Somit ist f eine Reduktion von $\bar{H}_0$ nach $C(\mathcal{S})$.

Da H_0 unentscheidbar ist, ist auch $\bar{H}_0$ unentscheidbar.

Satz von Rice (6)

Beweis (Fortsetzung).

Ferner gilt:

$$
\begin{aligned}
w \notin H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält nicht auf leerem Band} \\
&\Longrightarrow M_{f(w)} \text{ berechnet die Funktion } \Omega \\
&\Longrightarrow \text{die von } M_{f(w)} \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\
&\Longrightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})
\end{aligned}
$$

Zusammen folgt: $w \notin H_0$ gdw. $f(w) \in C(\mathcal{S})$,
also $w \in \bar{H}_0$ gdw. $f(w) \in C(\mathcal{S})$.

Somit ist f eine Reduktion von $\bar{H}_0$ nach $C(\mathcal{S})$.

Da H_0 unentscheidbar ist, ist auch $\bar{H}_0$ unentscheidbar.

Es folgt, dass $C(\mathcal{S})$ unentscheidbar ist. ...

Satz von Rice (7)

Beweis (Fortsetzung).

Fall 2: $\Omega \notin \mathcal{S}$

Analog zu Fall 1, aber wähle diesmal $q \in \mathcal{S}$.

Die entsprechende Funktion f ist dann eine Reduktion von H_0 auf $C(\mathcal{S})$.

Auch in diesem Fall folgt, dass $C(\mathcal{S})$ unentscheidbar ist. □

Satz von Rice: Anwendungen

Hat sich die Mühe gelohnt?

Wir wissen nun z.B. sofort, dass die folgenden (informell formulierten) Probleme alle unentscheidbar sind:

- Berechnet eine gegebene TM eine konstante Funktion?
- Berechnet eine gegebene TM eine totale Funktion (d.h. hält sie immer, und zwar in einer „korrekten“ Konfiguration)?
- Ist die Ausgabe einer gegebenen TM immer länger als ihre Eingabe?
- Berechnet eine gegebene TM die Identitätsfunktion?
- Berechnet eine gegebene TM die berechenbare Funktion f?
- ...

Zusammenfassung

Zusammenfassung (1)

Wichtige Begriffe:

- Entscheidbarkeit von Problemen (= Sprachen)
  entspricht Berechenbarkeit von „Ja/Nein“-Funktionen
- Semi-Entscheidbarkeit:
  - Erkennen von „Ja“-Instanzen in endlicher Zeit
  - keine Antwort bei „Nein“-Instanzen
- Zusammenhänge zu Typ-0-Sprachen
- Semi-Entscheidbarkeit = rekursive Aufzählbarkeit
- Entscheidbarkeit von L = Semi-Entscheidbarkeit von L und $\bar{L}$

Zusammenfassung (2)

Unentscheidbare, aber semi-entscheidbare Probleme:

- Spezielles Halteproblem (Selbstanwendbarkeitsproblem)
- allgemeines Halteproblem
- Halteproblem auf leerem Band

Wichtiges Konzept zum Beweis:

- Reduktion: „Zurückführen“ eines Problems auf ein anderes Problem

Satz von Rice:

- „Man kann einem Programm (einer Turingmaschine) im Allgemeinen nicht ansehen, was es berechnet.“