Theorie der Informatik

G. Röger
Frühjahrssemester 2019

Universität Basel
Fachbereich Informatik

Präsenzaufgaben 2 — Lösungen

Aufgabe 2.1 (Formelmengen und Resolution)
Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls für die Formelmenge

$$\mathrm{KB} = \{(A \lor B), (\neg B \lor C)\},$$

dass $\mathrm{KB} \models (A \lor C)$.

Lösung:
Es gilt, dass $\mathrm{KB} \models (A \lor C)$ gdw. $\mathrm{KB} \cup \{\neg(A \lor C)\}$ unerfüllbar ist.
$\mathrm{KB} \cup \{\neg(A \lor C)\}$ entspricht als Menge von Klauseln geschrieben

$$\Delta = \{\{A, B\}, \{\neg B, C\}, \{\neg A\}, \{\neg C\}\}.$$

Wir können wie folgt $\square$ ableiten, Δ ist also unerfüllbar.

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{A, B\} \quad (\text{aus } \Delta)\\
C_2 &= \{\neg B, C\} \quad (\text{aus } \Delta)\\
C_3 &= \{\neg A\} \quad (\text{aus } \Delta)\\
C_4 &= \{\neg C\} \quad (\text{aus } \Delta)\\
C_5 &= \{B\} \quad (\text{aus } C_1, C_3)\\
C_6 &= \{C\} \quad (\text{aus } C_2, C_5)\\
C_7 &= \square \quad (\text{aus } C_4, C_6)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.2 (Syntax der Prädikatenlogik)
Welche der folgenden Ausdrücke sind syntaktisch korrekte Formeln oder Terme für die folgende Signatur $\mathcal{S}$? Analysieren Sie auch alle Subformeln und Subterme. Geben Sie für die Formeln auch an, um welche Art von Formel es sich handelt (atomare Formel, Konjunktion, ...).

$$\mathcal{S} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$$

mit $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C} = \{\mathrm{c}\}$, $\mathcal{F} = \{\mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h}\}$, wobei $ar(f) = 3$, $ar(g) = ar(h) = 1$, und $\mathcal{P} = \{\mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{S}\}$, wobei $ar(Q) = 2$, $ar(R) = ar(S) = 1$.

(a) $\mathrm{f}(x, y, z)$

Lösung:

Term $\mathrm{f}(x, y, z)$ mit Subtermen x, y und z.

(b) $\mathrm{f}(x, y)$

Lösung:

Syntaktisch nicht korrekt, da Funktionssymbol f Stelligkeit 3 hat.

(c) $\mathrm{Q}(x, y)$

Lösung:

Atomare Formel $\mathrm{Q}(x, y)$ mit Subtermen x und y.

(d) $(\mathrm{g}(x) = \mathrm{R}(y))$

Lösung:

Syntaktisch nicht korrekt, da $\mathrm{R}(y)$ eine Formel ist, aber die Identität $(=)$ einen Term erfordert.

(e) $(\mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(y, \mathrm{c}, \mathrm{h}(x)))$

Lösung:

Es handelt sich um eine Identität mit Subtermen $\mathrm{g}(x)$ (mit Subterm x und $\mathrm{f}(y, \mathrm{c}, \mathrm{h}(x))$. Letzterer hat Subterme x (einer Variable), c (einer Konstante) und $\mathrm{h}(x)$ (ein Funktionsterm, wiederum mit Variable x als Subterm).

(f) $\forall \mathrm{c}\, \mathrm{Q}(c, x)$

Lösung:

Syntaktisch nicht korrekt, da der Allquantor eine Konstante und nicht wie syntaktisch gefordert eine Variable quantifiziert.

(g) $(\mathrm{R}(x) \wedge \forall x\, \mathrm{S}(x))$

Lösung:

Es handelt sich um eine Konjunktion mit atomarer Subformel R(x) (mit Subterm x) und Subformel $\forall x\, \mathrm{S}(x)$. Letztere ist eine Allquantifizierung mit (atomarer) Subformel $\mathrm{S}(x)$ mit Term x.

(h) $(\mathrm{g}(\mathrm{h}(x)) \wedge R(x))$

Lösung:

Syntaktisch nicht korrekt, da eine Konjunktion aus zwei Formeln gebildet wird, aber $\mathrm{g}(\mathrm{h}(x))$ ein Term ist.

(i) $(\forall x \exists y\, (\mathrm{g}(x) = y) \vee (\mathrm{h}(x) = \mathrm{c}))$

Lösung:

Diese Formel ist eine Disjunktion mit Subformeln $\forall x \exists y\, (\mathrm{g}(x) = y)$ und $(\mathrm{h}(x) = \mathrm{c})$.

Die Allquantifizierung $\forall x \exists y\, (\mathrm{g}(x) = y))$ hat Subformel $\exists y\, (\mathrm{g}(x) = y)$, die wiederum eine Existenzquantifizierung mit einer Identität $(\mathrm{g}(x) = y)$ als Subformel ist. Letztere hat Subterme $\mathrm{g}(x)$ (mit Subterm x) und y.

Die Formel $(\mathrm{h}(x) = \mathrm{c})$ ist eine Identität mit Subtermen $\mathrm{h}(x)$ und c.